PROGRESIONES ARITMÉTICAS

Problema 83:

Hallar el término general de la sucesión:

5, 12, 21, 32, 45, 60…

Solución Problema 83:

La diferencia entre los sucesivos términos nos indica que no es una progresión aritmética porque no se cumple:

$$d = a_2 - a_1 = 12 - 5 = 7$$

$$d = a_3 - a_2 = 21 - 12 = 9$$

Luego,

$$7 \neq 9$$

Tampoco es una progresión geométrica porque no cumple:

$$d = \frac{a_2}{a_1} = \frac{12}{5}$$

$$d = \frac{a_3}{a_2} = \frac{21}{12} = \frac{7}{4}$$

Luego,

$$\frac{12}{5} \neq \frac{7}{4}$$

Pero se cumple la segunda diferencia de sus términos es +2:

5 12 21 32 45 60…

+7 +9 +11 +13 +15

+2 +2 +2 +2

Luego, es una función cuadrática de la forma: $y= ax^2+bx+c$

Al ser una sucesión, emplearemos "n" en lugar de "x", y su término general será de la forma: $T_n= an^2+bn+c$. Donde "n" es el número del término de la progresión de izquierda a derecha.

Para calcularlo, damos valores a n, y lo sustituimos en la expresión del término general:

$para\ n = 1: a \cdot (1^2) + b \cdot 1 + c;\ a + b + c = 5\ ecuación\ 1$

$para\ n = 2: a \cdot (2^2) + b \cdot 2 + c;\ 4a + 2b + c = 12\ ecuación\ 2$

$para\ n = 3: a \cdot (3^2) + b \cdot 3 + c;\ 9a + 3b + c = 21\ ecuación\ 3$

Tenemos un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas a resolver:

Tomamos la ecuación 1 y 2:

$a + b + c = 5\ ecuación\ 1$

$4a + 2b + c = 12\ ecuación\ 2$

Despejamos “c”:

$c = 5 - a - b$

$c = 12 - 4a - 2b$

Igualamos en c:

$5 - a - b = 12 - 4a - 2b$

$-a - b + 4a + 2b = 12 - 5$

$3a + b = 7\ ecuación\ 4$

Tomamos la ecuación 1 y 3:

$a + b + c = 5\ ecuación\ 1$

$9a + 3b + c = 21\ ecuación\ 3$

Despejamos “c”:

$c = 5 - a - b$

$c = 21 - 9a - 3b$

Igualamos en c:

$5 - a - b = 21 - 9a - 3b$

$-a - b + 9a + 3b = 21 - 5$

$8a + 2b = 16\ \ ecuación\ 5$

Resolvemos el sistema de ecuaciones 4 y 5:

$3a + b = 7\ ecuación\ 4$

$8a + 2b = 16\ \ ecuación\ 5$

Multiplicamos la 4 por -2:

$-6a - 2b = -14\ ecuación\ 4$

Y sumamos la ecuación 5:

$8a - 6a + 2b - 2b = 16 - 14$

$2a = 2$

$a = \frac{2}{2} = 1$

Sustituimos su valor en la ecuación 4:

$3a + b = 7\ ecuación\ 4$

$3 \cdot 1 + b = 7$

$3 + b = 7$

$b = 7 - 3 = 4$

Sustituimos su valor en la ecuación 1:

$a + b + c = 5\ ecuación\ 1$

$c = 5 - a - b$

$c = 5 - 1 - 4 = 0$

Luego los coeficientes del término general son:

$a = 1$

$b = 4$

$c = 0$

El término general será:

$T_n = an^2 + bn + c$

$T_n = n^2 + 4n$