

PROGRESIONES GEOMÉTRICAS

Problema 70:

En una progresión geométrica, de 7 términos, el segundo es -8 y el quinto es 125. Calcular la suma y el producto de los términos.

Solución problema 70:

$$a_2 = -8$$

$$a_5 = 125$$

Hallamos la razón de la progresión, poniendo a_5 en función de a_2 :

$$a_5 = a_2 \cdot r^3$$

$$125 = (-8) \cdot r^3$$

$$5^3 = (-2)^3 \cdot r^3$$

Extrayendo la raíz cúbica en ambos miembros:

$$\sqrt[3]{5^3} = \sqrt[3]{(-2)^3} \cdot \sqrt[3]{r^3}$$

$$5 = (-2) \cdot r$$

$$r = \frac{-5}{2}$$

Calculamos el 1er término: a_1

$$a_2 = a_1 \cdot r$$

$$a_1 = \frac{a_2}{r} = \frac{-8}{\frac{-5}{2}} = \frac{8 \cdot 2}{5} = \frac{16}{5}$$

$$a_1 = \frac{16}{5}$$

Calculamos el séptimo término (último): a_7

$$a_7 = a_1 \cdot r^6$$

$$a_7 = \frac{16}{5} \cdot \left(\frac{-5}{2}\right)^6 = \frac{2^4}{5} \cdot \frac{(-5)^6}{2^6} = \frac{5^5}{2^2} = \frac{3125}{4}$$

$$a_7 = \frac{3125}{4}$$

Ahora, ya podemos calcular lo que nos pide el enunciado:

Suma de los términos:

$$S_n = \frac{a_n \cdot r - a_1}{r - 1}$$

En nuestro caso:

$$S_7 = \frac{a_7 \cdot r - a_1}{r - 1} = \frac{\frac{3125}{4} \cdot \left(\frac{-5}{2}\right) - \frac{16}{5}}{\frac{-5}{2} - 1} = \frac{\frac{-15625}{8} - \frac{16}{5}}{\frac{-7}{2}} = \frac{\frac{-78125 - 128}{40}}{\frac{-7}{2}}$$

$$S_7 = \frac{\frac{-78253}{40}}{\frac{-7}{2}} = \frac{78253 \cdot 2}{40 \cdot 7} = \frac{11179 \cdot \cancel{7} \cdot 2}{\cancel{2} \cdot 20 \cdot \cancel{7}} = \frac{11179}{20} = 558,95$$

$$S_7 = 558,95$$

Producto de los términos:

$$P = \sqrt{(a_1 \cdot a_n)^n}$$

En nuestro caso:

$$P = \sqrt{(a_1 \cdot a_7)^7}$$

$$P = \sqrt{\left(\frac{16}{5} \cdot \frac{3125}{4}\right)^7} = \sqrt{(4 \cdot 625)^7} = \sqrt{(2500)^7} = \sqrt{(25 \cdot 100)^7}$$

$$= \sqrt{(5^2 \cdot 10^2)^7} = \sqrt{5^{14} \cdot 10^{14}} = 5^7 \cdot 10^7 = (5 \cdot 10)^7 = 50^7$$

$$P = 50^7 = 781.250.000.000$$