

## LOGARITMOS

### Problema 111:

Resolver el sistema:

$$x^2 - y^2 = 10.000$$

$$(x - y)^{\log(x+y)} = 1.000$$

### Solución Problema 111:

$$x^2 - y^2 = 10.000$$

$$(x - y)^{\log(x+y)} = 1.000$$

En la 1ª ecuación aplicamos la identidad notable de diferencia de cuadrados igual a suma por diferencia, y después, tomaremos logaritmos en ambos términos, y aplicaremos las propiedades de los logaritmos. En la 2ª ecuación tomaremos logaritmos en ambos términos y aplicaremos las propiedades de los logaritmos:

Ecuación 1:

$$x^2 - y^2 = 10.000$$

$$(x + y) \cdot (x - y) = 10.000$$

$$\log[(x + y) \cdot (x - y)] = \log 10.000$$

$$\log(x + y) + \log(x - y) = 4 \text{ ecuación 3}$$

Ecuación 2:

$$(x - y)^{\log(x+y)} = 1.000$$

$$\log[(x - y)^{\log(x+y)}] = \log 1.000$$

$$\log(x + y) \cdot \log(x - y) = 3 \text{ ecuación 4}$$

Nos queda, por tanto, el siguiente sistema:

$$\log(x + y) + \log(x - y) = 4 \text{ ecuación 3}$$

$$\log(x + y) \cdot \log(x - y) = 3 \text{ ecuación 4}$$

Ahora hacemos el siguiente cambio de variable:

$$\log(x + y) = a$$

$$\log(x - y) = b$$

Las ecuaciones 3 y 4 nos quedarán:

$$a + b = 4 \text{ ecuación 5}$$

$$a \cdot b = 3 \text{ ecuación 6}$$

Despejamos a de la ecuación 5, y la sustituimos en la 6:

$$a = 4 - b$$

$$(4 - b) \cdot b = 3$$

Operando:

$$4b - b^2 = 3$$

$$b^2 - 4b + 3 = 0$$

$$b = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3}}{2 \cdot 1} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2}$$

$$b_1 = \frac{4 + 2}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

$$b_2 = \frac{4 - 2}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

Hallamos los valores de a en función de los de b:

Para b= 3;

$$a = 4 - b = 4 - 3 = 1$$

$$a = 1$$

Para b= 1;

$$a = 4 - b = 4 - 1 = 3$$

$$a = 3$$

Ahora, sustituimos los valores de  $a= 3$  y  $b= 1$  para hallar  $x$  e  $y$ :

$$\log(x + y) = a$$

$$\log(x - y) = b$$

Luego:

$$\log(x + y) = 3$$

$$\log(x - y) = 1$$

$$\log(x + y) = \log 1.000$$

$$\log(x - y) = \log 10$$

Se suprimen en ambos términos de las dos ecuaciones los logaritmos:

$$x + y = 1.000$$

$$x - y = 10$$

Por reducción, resolvemos el sistema:

$$2x = 1.010$$

$$x = \frac{1010}{2} = 505$$

Sustituyendo el valor de  $x$ :

$$x + y = 1.000$$

$$y = 1.000 - x = 1000 - 505 = 495$$

Luego la solución es:

$$x = \mathbf{505}$$

$$y = \mathbf{495}$$

La solución  $a= 1$ , y  $b= 3$  no es válida