PROGRESIONES GEOMÉTRICAS

Problema 67:

Tres números naturales están en progresión geométrica y son tales que aumentados respectivamente en 8, 6 y 4 unidades son proporcionales a 5, 6 y 11. Hallar esos números.

Solución problema 67:

Sean a_1, a_2, a_3 los números pedidos. De manera que:

$$a_1 + 8 = 5k$$

$$a_2 + 6 = 6k$$

$$a_3 + 4 = 11k$$

Luego:

$$k = \frac{a_1 + 8}{5} \quad ecuación\ 1$$

$$k = \frac{a_2 + 6}{6} \quad ecuación\ 2$$

$$k = \frac{a_3 + 4}{11} \quad ecuación\ 3$$

Igualamos las ecuaciones 1 y 2:

$$\frac{a_1 + 8}{5} = \frac{a_2 + 6}{6} \quad ecuación\ 4$$

Igualamos las ecuaciones 2 y 3:

$$\frac{a_2 + 6}{6} = \frac{a_3 + 4}{11} \quad ecuación\ 5$$

En las ecuaciones 4 y 5 ponemos los términos a_2 y a_3 en función de a_1:

$$\frac{a_1 + 8}{5} = \frac{(a_1 \cdot r) + 6}{6} \quad ecuación\ 6$$

$$\frac{(a_1 \cdot r) + 6}{6} = \frac{(a_1 \cdot r^2) + 4}{11} \quad ecuación\ 7$$

Ahora tenemos dos ecuaciones con dos incógnitas, y operamos en la ecuación 6:

$$\frac{a_1 + 8}{5} = \frac{(a_1 \cdot r) + 6}{6}$$

$$6a_1 + 48 = 5a_1 r + 30$$

$$5a_1 r + 30 - 6a_1 - 48 = 0$$

$$5a_1 r - 6a_1 = 18$$

$$r = \frac{18 + 6a_1}{5a_1} \quad ecuación\ 8$$

Hacemos lo mismo con la ecuación 7:

$$\frac{(a_1 \cdot r) + 6}{6} = \frac{(a_1 \cdot r^2) + 4}{11}$$

$$11a_1 r + 66 = 6a_1 r^2 + 24$$

$$6a_1 r^2 + 24 - 11a_1 r - 66 = 0$$

$$6a_1 r^2 - 11a_1 r - 42 = 0 \quad ecuación\ 9$$

Sustituimos el valor de r de la ecuación 8 en la 9:

$$6a_1 (\frac{18 + 6a_1}{5a_1})^2 - 11a_1 (\frac{18 + 6a_1}{5a_1}) - 42 = 0$$

$$6a_1 \frac{(18 + 6a_1)^2}{(5a_1)^2} - 11a_1 (\frac{18 + 6a_1}{5a_1}) - 42 = 0$$

$$6\cancel{a_1} \frac{(18 + 6a_1)^2}{25{a_1}^{\cancel{2}}} - 11\cancel{a_1} (\frac{18 + 6a_1}{5\cancel{a_1}}) - 42 = 0$$

$$6 \frac{(18 + 6a_1)^2}{25a_1} - 11 (\frac{18 + 6a_1}{5}) - 42 = 0$$

$$6\frac{324+36{a_1}^2+216a_1}{25a_1}-\frac{198+66a_1}{5}-42=0$$

Se puede simplificar por 6 toda la ecuación:

$$\cancel{6}\frac{324+36{a_1}^2+216a_1}{25a_1}-\frac{33\cdot\cancel{6}+11\cdot\cancel{6}a_1}{5}-7\cdot\cancel{6}=0$$

$$\frac{324+36{a_1}^2+216a_1}{25a_1}-\frac{33+11a_1}{5}-7=0$$

$$324+36{a_1}^2+216a_1-5a_1(33+11a_1)-25a_1\cdot 7=0$$

$$324+36{a_1}^2+216a_1-165a_1-55{a_1}^2-175a_1=0$$

$$-19{a_1}^2-124a_1+324=0$$

$$19{a_1}^2+124a_1-324=0$$

$$a_1=\frac{-124\pm\sqrt{15.376+24.624}}{38}=\frac{-124\pm\sqrt{40.000}}{38}=\frac{-124\pm 200}{38}=$$

$$\boldsymbol{a_{11}}=\frac{-124+200}{38}=\frac{76}{38}=\mathbf{2}\ solución\ válida.\ 2\in\boldsymbol{N}$$

$$a_{12}=\frac{-124-200}{38}=\frac{-324}{38}=\frac{-324}{38}solución\ no\ válida\frac{-324}{38}\ \boldsymbol{no}\ \in\boldsymbol{N}$$

Hallamos el valor de r sustituyendo el valor de a_1 en la ecuación 8:

$$r=\frac{18+6a_1}{5a_1}\ ecuación\ 8$$

$$\boldsymbol{r}=\frac{18+6a_1}{5a_1}=\frac{18+6\cdot 2}{5\cdot 2}=\frac{18+12}{10}=\frac{30}{10}=\mathbf{3}$$

Hallamos a_2 y a_3:

$$\boldsymbol{a_2}=a_1\cdot r=2\cdot 3=\mathbf{6}$$

$$\boldsymbol{a_3}=a_2\cdot r=6\cdot 3=\mathbf{18}$$

Luego, se cumple:

$$\frac{a_1 + 8}{5} = \frac{a_2 + 6}{6} = \frac{a_3 + 4}{11} = k$$

$$\frac{\mathbf{2} + 8}{5} = \frac{\mathbf{6} + 6}{6} = \frac{\mathbf{18} + 4}{11} = \boldsymbol{k} = \mathbf{2}$$