

PROGRESIONES ARITMÉTICAS

Problema 74:

Tres números están en progresión aritmética, y son tales que aumentados, respectivamente, en cinco, cuatro y siete unidades, son proporcionales a cinco, seis y nueve. Hallar esos números.

Solución Problema 74:

Sean a_1 , a_2 y a_3 los números pedidos, de tal forma que:

$$a_1 + 5 = b_1$$

$$a_2 + 4 = b_2$$

$$a_3 + 7 = b_3$$

Sabemos que:

$$\frac{b_1}{5} = k$$

$$\frac{b_2}{6} = k$$

$$\frac{b_3}{9} = k$$

Por tanto, podemos poner:

$$\frac{a_1 + 5}{5} = k$$

$$\frac{a_2 + 4}{6} = k$$

$$\frac{a_3 + 7}{9} = k$$

Y poniendo a_2 y a_3 en función de a_1

$$\frac{a_1 + 5}{5} = k$$

$$\frac{(a_1 + d) + 4}{6} = k$$

$$\frac{(a_1 + 2d) + 7}{9} = k$$

Igualando en k dos a dos las ecuaciones, tenemos:

$$\frac{a_1 + 5}{5} = \frac{(a_1 + d) + 4}{6}$$

$$\frac{(a_1 + d) + 4}{6} = \frac{(a_1 + 2d) + 7}{9}$$

Operando en ambas igualdades:

$$\frac{a_1 + 5}{5} = \frac{(a_1 + d) + 4}{6}$$

$$6a_1 + 30 = 5a_1 + 5d + 20$$

$$6a_1 - 5a_1 = 5d + 20 - 30$$

$$a_1 = 5d - 10 \text{ ecuación 1}$$

Segunda igualdad:

$$9a_1 + 9d + 36 = 6a_1 + 12d + 42$$

$$9a_1 - 6a_1 = 12d - 9d + 42 - 36$$

$$3a_1 = 3d + 6$$

$$a_1 = d + 2 \text{ ecuación 2}$$

Igualando en a_1 las dos ecuaciones:

$$5d - 10 = d + 2$$

$$5d - d = 2 + 10$$

$$4d = 12$$

$$d = \frac{12}{4} = 3$$

Luego,

$$a_1 = 5d - 10 \text{ ecuación 1}$$

$$a_1 = 5 \cdot 3 - 10 = 15 - 10 = 5$$

$$a_2 = a_1 + d = 5 + 3 = \mathbf{8}$$

$$a_3 = a_1 + 2d = 5 + 2 \cdot 3 = 5 + 6 = \mathbf{11}$$

Por tanto, los números son: 5, 8, 11

$$\frac{a_1 + 5}{5} = \frac{5 + 5}{5} = \frac{10}{5} = 2$$

$$\frac{a_2 + 4}{6} = \frac{8 + 4}{6} = \frac{12}{6} = 2$$

$$\frac{a_3 + 7}{9} = \frac{11 + 7}{9} = \frac{18}{9} = 2$$