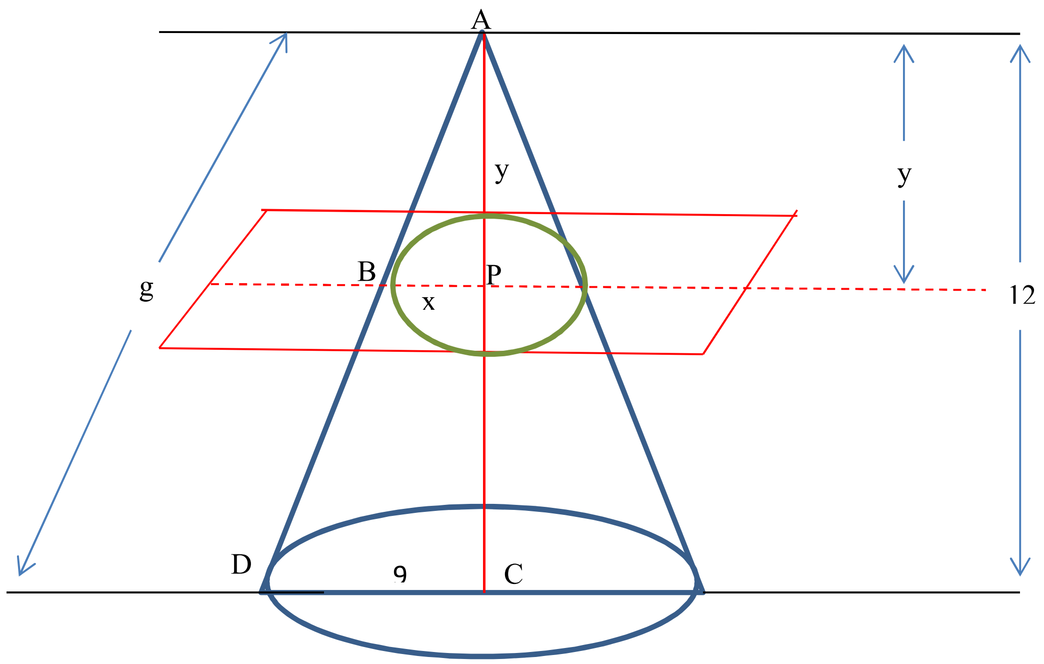
PROBLEMAS CON PLANTEO DE ECUACIONES Y SISTEMAS

Problema 275:

Un cono de revolución tiene 12 cm de altura, y el radio de su base igual a 9 cm. Por un punto de su generatriz o lado, se traza un plano paralelo a la base. Hallar a qué distancia del vértice del cono hay que tomar dicho punto para que, el área lateral del cono deficiente obtenido, sea un tercio del resto de la superficie lateral del cono dado.

Solución Problema 275:



La distancia que nos piden hallar es: AP= y.

Del triángulo rectángulo ACD calculamos la generatriz g aplicando el teorema de Pitágoras:

$$g^2 = AC^2 + CD^2$$

$$g = \sqrt{12^2 + 9^2} = \sqrt{144 + 81} = \sqrt{225} = 15\ cm$$

Ahora calculamos el área lateral del cono grande (inicial):

$A_{lcg} = \pi r g$

$A_{lcg} = \pi \cdot 9 \cdot 15 = 135\pi$

Ahora tenemos que calcular el área lateral del cono pequeño, para ello:

Calculamos el radio (PB= x) del cono pequeño mediante semejanza de triángulos:

El triángulo rectángulo ACD es semejante al triángulo rectángulo ABP, luego:

$$\frac{y}{x} = \frac{12}{9}$$

$$x = \frac{9y}{12} = \frac{3y}{4}$$

Por otra parte, sabemos que la generatriz (g_{cp}=AB) del cono pequeño es igual, por el teorema de Pitágoras a:

$$g_{cp}{}^2 = x^2 + y^2$$

$$g_{cp} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

En esta ecuación sustituimos el valor de x en función de y:

$$g_{cp} = \sqrt{(\frac{3y}{4})^2 + y^2} = \sqrt{\frac{9y^2}{16} + y^2} = \sqrt{\frac{9y^2 + 16y^2}{16}} = \sqrt{\frac{25y^2}{16}} = \frac{5y}{4}$$

Ahora, hallamos el área lateral del cono pequeño:

$A_{lcp} = \pi r g$

$$A_{lcp} = \pi x g_{cp} = \pi \cdot \frac{3y}{4} \cdot \frac{5y}{4} = \frac{15y^2}{16} \cdot \pi$$

Pero sabemos que el área lateral del cono pequeño para esta distancia *y* es un tercio del área lateral del cono grande, luego:

$$A_{lcp} = \frac{1}{3} \cdot \ A_{lcg}$$

$$A_{lc} \ \ = \frac{1}{3} \cdot \ A_{lcg}$$

$$\frac{15y^2}{16} \cdot \cancel{\pi} = \frac{1}{3} \cdot 135\cancel{\pi}$$

$$\frac{15y^2}{16} = 45$$

$$y^2 = \frac{16 \cdot 45}{15} = \ 16 \cdot 3$$

$$y = \ \sqrt{16 \cdot 3} = 4 \cdot \sqrt{3} = 4 \cdot 1{,}732 = \ 6{,}928 \ cm$$