RADICACIÓN

Problema 58:

Simplifica:

$$\left[\frac{\sqrt[n]{2^{-n}+2^{-n+1}+2^{2-n}}}{(5+2\sqrt{6})^{1/2}\cdot(\sqrt{3}+\sqrt{2})^{-1/2}}\right]\cdot\left[\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt[n]{7^2}}\right]^{1/2}$$

Solución Problema 58:

Antes de resolver el problema vamos a transformar el radical abajo indicado en la suma de dos radicales:

$$(5+2\sqrt{6})^{1/2}=\sqrt{5+2\sqrt{6}}$$

Para ello, hacemos lo siguiente:

$$\sqrt{5+2\sqrt{6}}=\sqrt{x}+\sqrt{y}$$

$$(\sqrt{5+2\sqrt{6}})^2=(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2$$

$$5+2\sqrt{6}=x+y+2\sqrt{xy}$$

Agrupamos términos sin raíz:

$5 = x + y$

Despejamos x:

$x = 5 - y \ ecuación\ 1$

Agrupamos términos con raíz:

$\cancel{2}\sqrt{6} = \cancel{2}\sqrt{xy}$

$\sqrt{6} = \sqrt{xy}$

Elevamos al cuadrado:

$\sqrt{6}^2 = \sqrt{xy}^2$

Nos queda:

$6 = xy \ ecuación\ 2$

Sustituimos el valor de x de la ecuación 1 en la 2:

$(5 - y)y = 6$

$5y - y^2 = 6$

$y^2 - 5y + 6 \ = 0$

$$y = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2 \cdot 1} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{1}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{1}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2}$$

$$y_1 = \frac{5 + 1}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

$$y_2 = \frac{5 - 1}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

Por tanto:

Para $y_1 = 3$;

$x = 5 - y = 5 - 3 = 2$

Por tanto:

Para $y_2 = 2$;

$x = 5 - 2 = 3$

Ambas soluciones son válidas.

Luego, el radical lo podemos expresar como suma de dos radicales:

$$(5 + 2\sqrt{6})^{1/2} = \sqrt{5 + 2\sqrt{6}} = \sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{3} + \sqrt{2}$$

Sustituyendo su valor en la expresión inicial:

$$\left[\frac{\sqrt[n]{2^{-n}+2^{-n+1}+2^{2-n}}}{(5+2\sqrt{6})^{1/2}\cdot(\sqrt{3}+\sqrt{2})^{-1/2}}\right]\cdot\left[\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt[n]{7^2}}\right]^{1/2}=\left[\frac{\sqrt[n]{2^{-n}+2^{-n+1}+2^{2-n}}}{\sqrt{5+2\sqrt{6}}\cdot(\sqrt{3}+\sqrt{2})^{-1/2}}\right]\cdot\left[\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt[n]{7^2}}\right]^{1/2}=$$

$$=\left[\frac{\sqrt[n]{2^{-n}+2^{-n+1}+2^{2-n}}}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})\cdot(\sqrt{3}+\sqrt{2})^{-1/2}}\right]\cdot\left[\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt[n]{7^2}}\right]^{1/2}=\left[\frac{\sqrt[n]{\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^n}\cdot 2+\frac{1}{2^n}\cdot 2^2}}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})}\right]\cdot\frac{\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^{1/2}\cdot(\sqrt{3}+\sqrt{2})^{1/2}}{\sqrt[2n]{7^2}}=$$

$$=\left[\frac{\sqrt[n]{\frac{1}{2^n}(1+2+4)}}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})}\right]\cdot\frac{\sqrt{(\sqrt{3}+\sqrt{2})}\cdot\sqrt{(\sqrt{3}+\sqrt{2})}}{\sqrt[n]{7}}=\left[\frac{1}{2}\cdot\frac{\cancel{\sqrt[n]{7}}}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})}\right]\cdot\frac{\sqrt{(\sqrt{3}+\sqrt{2})}^{\,2}}{\cancel{\sqrt[n]{7}}}=\left[\frac{1}{2}\cdot\frac{\cancel{(\sqrt{3}+\sqrt{2})}}{\cancel{(\sqrt{3}+\sqrt{2})}}\right]=\frac{1}{2}$$

Por tanto:

$$\left[\frac{\sqrt[n]{2^{-n}+2^{-n+1}+2^{2-n}}}{(5+2\sqrt{6})^{1/2}\cdot(\sqrt{3}+\sqrt{2})^{-1/2}}\right]\cdot\left[\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt[n]{7^2}}\right]^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}$$