

PROGRESIONES ARITMÉTICAS

Problema 64:

Encontrar tres términos de una progresión aritmética, sabiendo que su suma es 24 y que si al primero se le resta una unidad y al segundo dos unidades, se obtiene una progresión geométrica.

Solución Problema 64:

Sabemos que:

$$a_1 + a_2 + a_3 = 24$$

$$a_1 - 1 = b_1$$

$$a_2 - 2 = b_2$$

$$a_3 = b_3$$

Sabemos que en una progresión geométrica:

$$r = \frac{b_2}{b_1}$$

$$r = \frac{b_3}{b_2}$$

Igualando en r:

$$\frac{b_2}{b_1} = \frac{b_3}{b_2}$$

Expresando esta igualdad en función de los términos de la progresión aritmética:

$$\frac{a_2 - 2}{a_1 - 1} = \frac{a_3}{a_2 - 2}$$

$$(a_2 - 2)^2 = a_3 \cdot (a_1 - 1)$$

$$a_2^2 - 4a_2 + 4 = a_3 \cdot a_1 - a_3$$

Expresando esta igualdad en función de a_1 :

$$(a_1 + d)^2 - 4(a_1 + d) + 4 = (a_1 + 2d) \cdot a_1 - (a_1 + 2d)$$

Operando sobre ella:

$$a_1^2 + 2da_1 + d^2 - 4a_1 - 4d + 4 = a_1^2 + 2da_1 - a_1 - 2d$$

$$d^2 - 4a_1 - 4d + 4 + a_1 + 2d = 0$$

$$d^2 - 3a_1 - 2d + 4 = 0 \text{ ecuación 1}$$

Por otra parte tenemos:

$$a_1 + a_2 + a_3 = 24$$

Expresándola en función de a_1 :

$$a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) = 24$$

$$3a_1 + 3d = 24$$

$$a_1 + d = 8$$

$$a_1 = 8 - d \text{ ecuación 2}$$

Sustituimos el valor a_1 de la ecuación 2 en la 1:

$$d^2 - 3a_1 - 2d + 4 = 0 \text{ ecuación 1}$$

$$d^2 - 3(8 - d) - 2d + 4 = 0$$

$$d^2 - 24 + 3d - 2d + 4 = 0$$

$$d^2 + d - 20 = 0$$

$$d = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 80}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{81}}{2} = \frac{-1 \pm 9}{2}$$

$$d_1 = \frac{-1 + 9}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

$$d_2 = \frac{-1 - 9}{2} = \frac{-10}{2} = -5$$

Para $d=4$, sustituyo su valor en la ecuación 2:

$$a_1 = 8 - d \text{ ecuación 2}$$

$$a_1 = 8 - 4 = 4$$

$$a_2 = a_1 + d = 4 + 4 = 8$$

$$a_3 = a_2 + d = 8 + 4 = 12$$

Los números pedidos son: 4, 8 y 12

$$d_2 = \frac{-1 - 9}{2} = \frac{-10}{2} = -5$$

Para $d = -5$, sustituyo su valor en la ecuación 2:

$$a_1 = 8 - d \text{ ecuación 2}$$

$$a_1 = 8 - (-5) = 8 + 5 = 13$$

$$a_2 = a_1 + d = 13 - 5 = 8$$

$$a_3 = a_2 + d = 8 - 5 = 3$$

Los números pedidos son: 3, 8 y 13