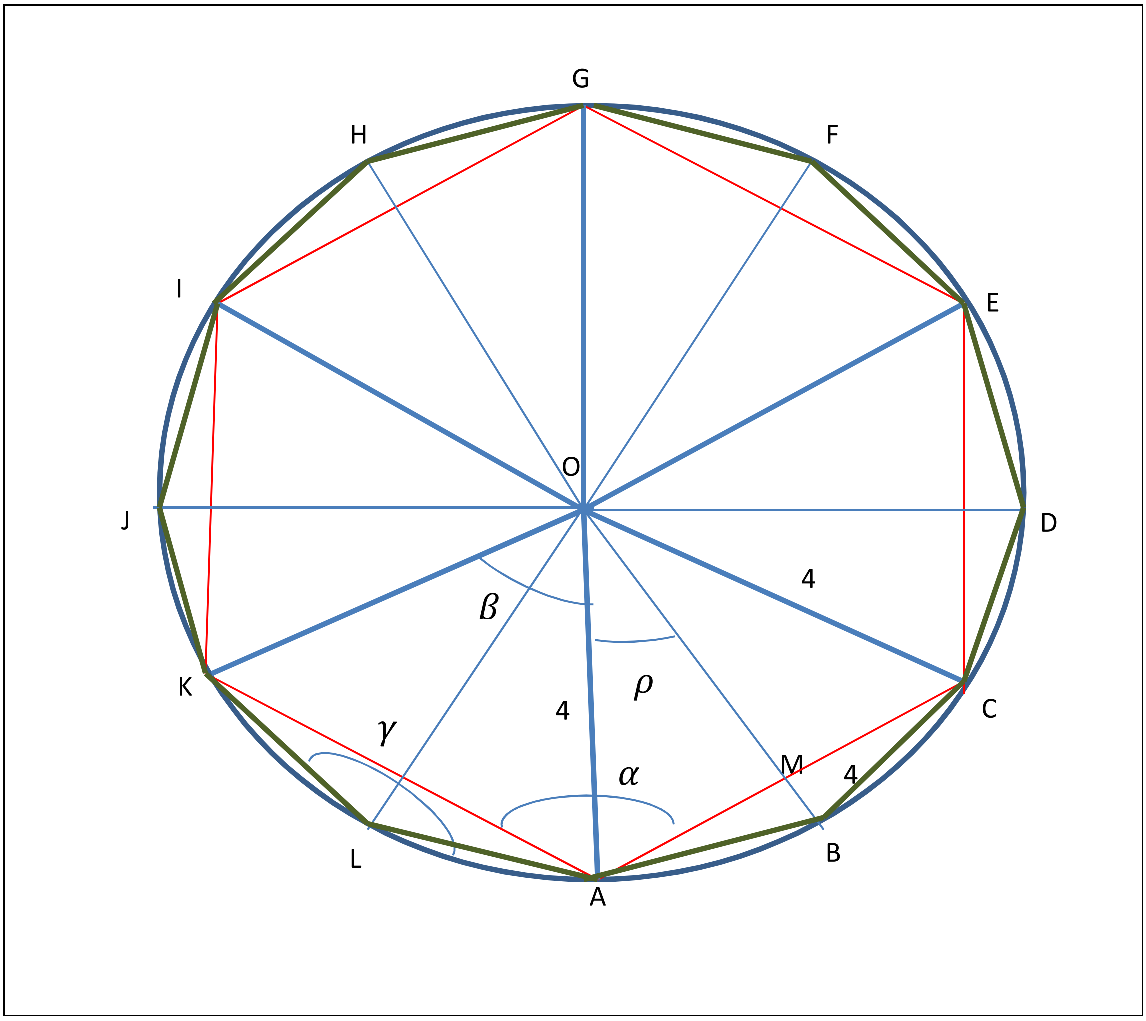
PROBLEMAS DE TRIGONOMETRÍA

Problema198:

Sobre los lados de un hexágono regular se construyen cuadrados. Al unir los vértices de estos cuadrados se obtiene un dodecágono regular. Si el lado del hexágono mide 4 cm, calcular el área del dodecágono.

Solución Problema 198:



Al ser un hexágono regular: (línea color rojo)

Los lados: AC, CE, EG, GI, IK, y KA son iguales, 4cm

En su interior se forman 6 triángulos equiláteros: AOC, COE, EOG; GOI; IOK y KOA, sus lados también miden 4 cm

Los ángulos interiores miden lo mismo: 120º

$$\alpha = \frac{2n-4}{n} \cdot 90º = \frac{2 \cdot 6 - 4}{6} \cdot 90º = \frac{12-4}{6} \cdot 90º = 8 \cdot 15º = 120º$$

Siendo n= número de lados.

El ángulo central de cada triángulo mide 60º

$$\beta = \frac{360}{6} = 60º$$

Por otra parte, al ser un dodecágono regular: (línea color verde)

Los lados AB, BC, CD, DE, EF, FG, GH, HI, IJ, JK, KL y LA son iguales.

En su interior se forman 12 triángulos isósceles iguales a AOB porque los lados son iguales al radio de la circunferencia circunscrita.

Los ángulos interiores miden lo mismo: 150º

$$\gamma = \frac{2n-4}{n} \cdot 90º = \frac{2 \cdot 12 - 4}{12} \cdot 90º = \frac{24-4}{12} \cdot 90º = 150º$$

Siendo n= número de lados.

El ángulo central de cada triángulo mide 30º

$$\rho = \frac{360}{12} = 30º$$

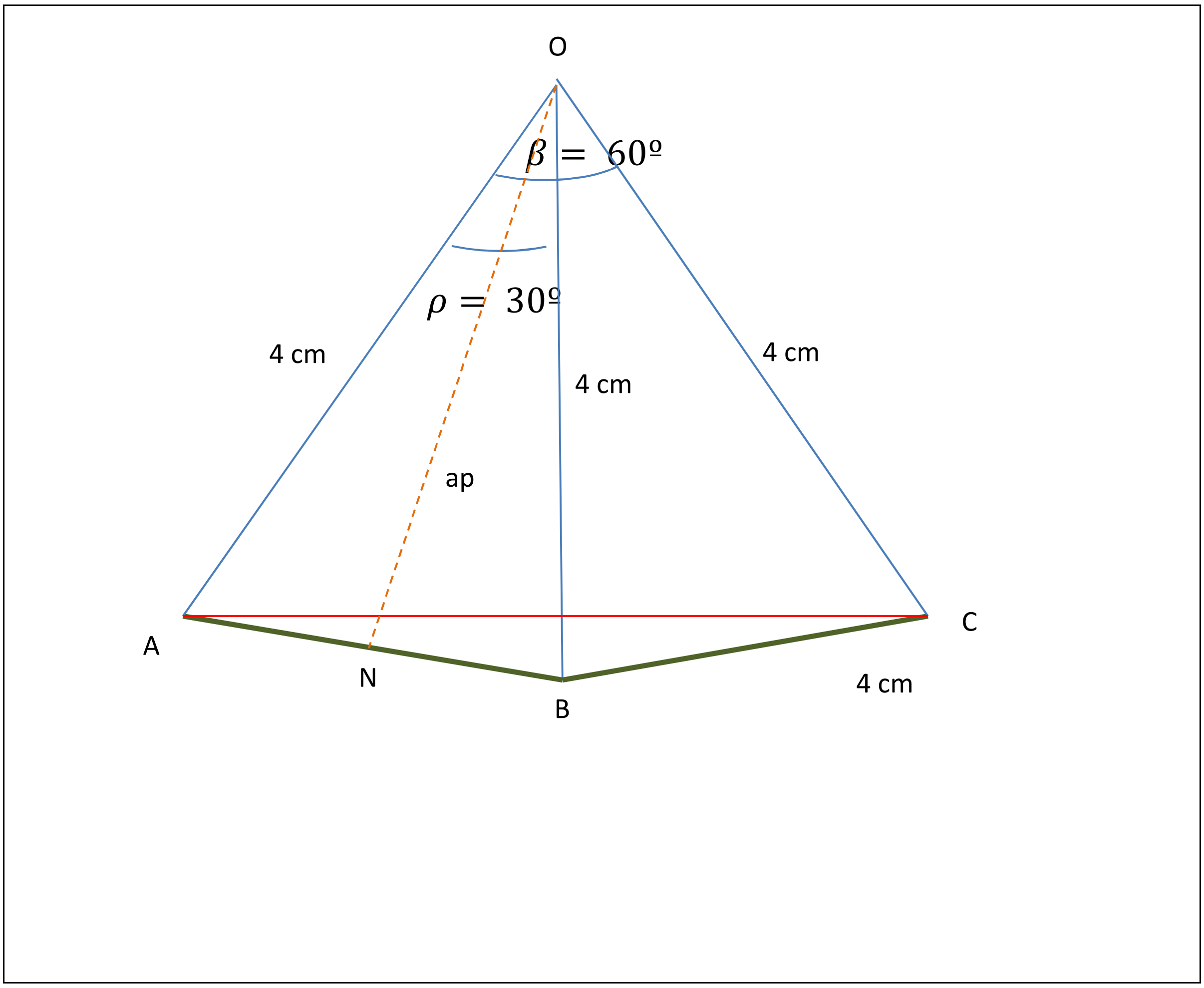
Para los cálculos siguientes vamos a trabajar con:

El triángulo AOC: Es un triángulo equilátero

El triángulo AOB: es u triángulo isósceles

Los lados OA=OB porque es el radio de la circunferencia circunscrita, luego OA=OB= 4cm

Al conocer dos lados (OA y OB) y el ángulo comprendido ρ, se aplica el teorema del coseno para hallar el lado del dodecágono, AB



$$AB^2 = AO^2 + BO^2 - 2 \cdot AO \cdot BO - \cos 30º$$

$$AB^2 = r^2 + r^2 - 2 \cdot r \cdot r \cdot \cos 30º$$

$$AB^2 = 4^2 + 4^2 - 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 16 + 16 - 32\frac{\sqrt{3}}{2} = 32 - 16 \cdot 1{,}73$$

$$AB^2 = 32 - 27{,}68 = 4{,}32$$

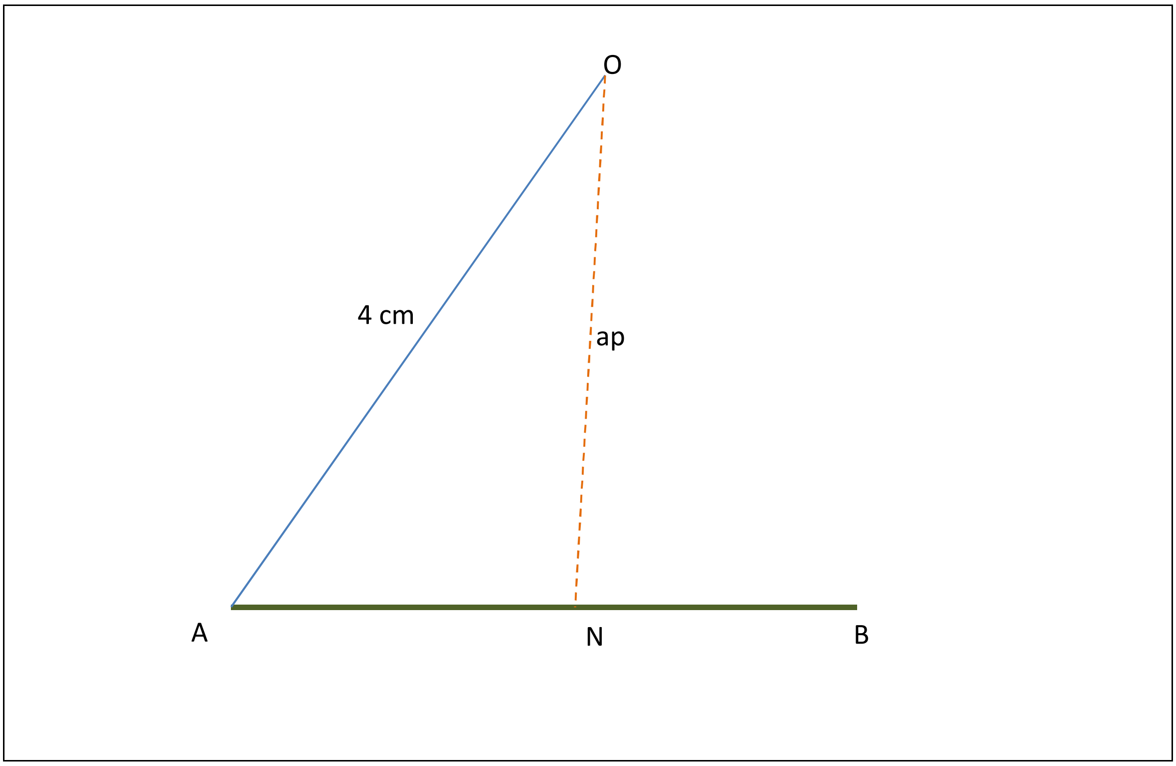
$$AB = \sqrt{4{,}32} = 2{,}07\ cm\ es\ la\ longitud\ del\ lado\ del\ dodecágono.$$

Ahora hallamos la apotema del triángulo AOB:

Es la perpendicular desde el centro del triángulo a la mitad del lado AB, por tanto:

La distancia AN será:

$$AN = \frac{AB}{2} = \frac{2{,}07}{2} = 1{,}035\ cm$$



Aplicando el teorema de Pitágoras:

$$ap^2 = AO^2 - AN^2$$

$$ap^2 = 4^2 - 1{,}035^2 = 16 - 1{,}071 = 14{,}929 = 14{,}93\ cm$$

$$ap = \sqrt{14{,}93} = 3{,}86\ cm$$

Conocido el lado y la apotema hallamos el área del dodecágono:

$$A = \frac{p \cdot ap}{2} = \frac{12 \cdot\ 2{,}07 \cdot 3{,}86}{2} = 47{,}94\ cm^2$$