PROGRESIONES GEOMÉTRICAS

Problema 62:

Se tiene la ecuación: $1+a+a^2+\ldots+a^n= B$. El número a es la abscisa del punto de la curva $y= x^2-6x$ en el cual la tangente a la misma es paralela al eje OX. B es el módulo del número complejo:

$(1+\sqrt{10}\cdot i)^4$

Calcular n.

Solución problema 62:

1.- Calculo el módulo del complejo:

$$|z| = \sqrt{1^2+\sqrt{10}^2} = \sqrt{1+10} = \sqrt{11}$$

Como el complejo está elevado a la 4ª potencia:

$$|z|^4 = \sqrt{11}^4 = 121$$

La ecuación queda:

$$1 + \mathrm{a} + a^2 + \cdots + a^n = 121$$

2.- Calculo el número a:

Para ello, hallo la 1ª derivada de la curva en el punto a y la tangente en ese punto a tiene la misma pendiente que el eje OX por ser paralela a él.

1ª derivada de la función:

$$y = x^2 - 6x$$

$$y' = 2\mathrm{x} - 6$$

Pendiente eje OX:

$$m_{ox} = 0$$

Luego:

$y' = m_{ox}$

$2\text{x} - 6 = 0$

$\text{x} = \frac{6}{2} = 3$

Luego, el número a es 3, y la ecuación queda:

$1 + 3 + 3^2 + \cdots + 3^n = 121$

Es una progresión geométrica de razón 3:

$\text{r} = \frac{a_2}{a_1} = \frac{3}{1} = 3$

La suma será:

$$S_n = \frac{a_n \cdot r - a_1}{r - 1}$$

En nuestro caso:

$$121 = \frac{3^n \cdot 3 - 1}{3 - 1} = \frac{3^n \cdot 3 - 1}{2}$$

Para quitar la raíz cuadrada elevo los dos términos al cuadrado:

$$121 = \frac{3^{n+1} - 1}{2}$$

$242 = 3^{n+1} - 1$

$242 + 1 = 3^{n+1}$

$243 = 3^{n+1}$

$3^{n+1} = 3^5$

$\text{n} + 1 = 5$

$\text{n} = 5 - 1 = 4$