RADICACIÓN

Problema 51:

¿Es cierta la igualdad siguiente?

$$\sqrt[n]{\sqrt[p]{a}} = \sqrt[p]{\sqrt[n]{a}}$$

Solución Problema 51:

Es la raíz de un radical. Así:

$$\sqrt[n]{\sqrt[p]{a}} = x \;\; \text{ecuación 1}$$

Elevamos ambos miembros de la igualdad a n:

$$\left(\sqrt[n]{\sqrt[p]{a}}\right)^n = (x)^n$$

$$\sqrt[p]{a} = (x)^n$$

$$\sqrt[p]{a} = x^n$$

Elevamos ambos miembros de la igualdad a p:

$$\left(\sqrt[p]{a}\right)^p = (x^n)^p$$

$$a = (x^n)^p$$

Sabemos que el segundo miembro de la igualdad es una potencia de una potencia, y aplicando, también, la propiedad conmutativa de la multiplicación tenemos, por tanto:

$$a = x^{n \cdot p} = x^n \cdot x^p = x^p \cdot x^n = x^{p \cdot n} = (x^p)^n$$

Extraemos la raíz n en ambos miembros de la igualdad:

$$\sqrt[n]{a} = \left(\sqrt[n]{x^p}\right)^n$$

$$\sqrt[n]{a} = x^p$$

Extraemos la raíz p en ambos miembros de la igualdad:

$$\sqrt[p]{\sqrt[n]{\mathrm{a}}} = \sqrt[p]{x^p}$$

$$\sqrt[p]{\sqrt[n]{\mathrm{a}}} = \mathrm{x} \quad \text{ecuación 2}$$

Igualando en x las ecuaciones 1 y 2:

$$\sqrt[n]{\sqrt[p]{\mathrm{a}}} = \sqrt[p]{\sqrt[n]{\mathrm{a}}}$$

Por tanto es cierta la igualdad.