

PROBLEMAS DE TRIGONOMETRÍA

Problema 181:

El radio de un pentágono regular mide 20 m. Calcular el área de dicho pentágono.

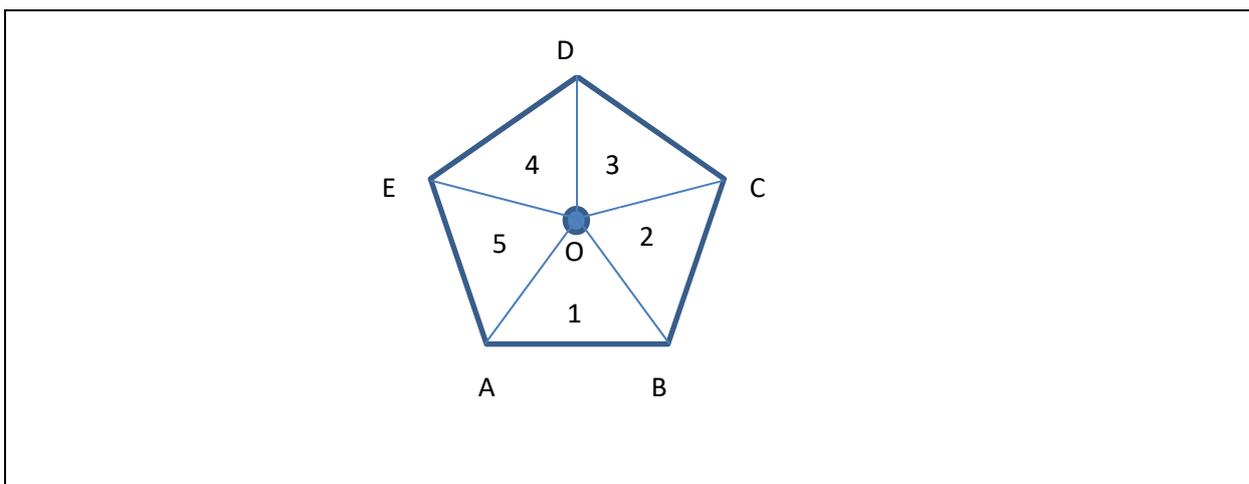
Solución Problema 181:

Pentágono regular significa que tiene los 5 lados iguales, y los 5 ángulos interiores iguales.

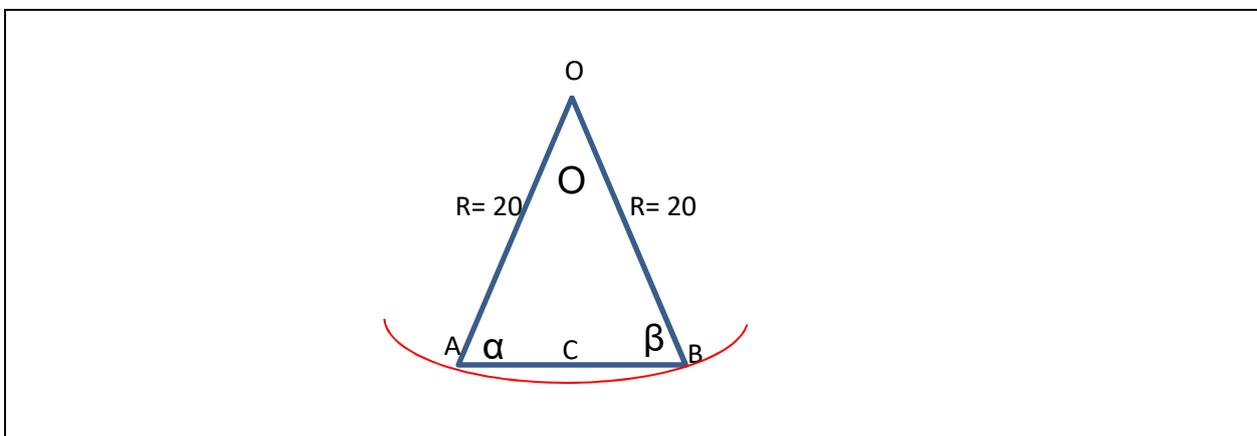
El radio de un polígono regular es el radio de la circunferencia circunscrita al polígono.

La apotema de un polígono regular es el radio de la circunferencia inscrita en el polígono.

Al ser un pentágono regular los 5 triángulos que se forman son iguales:



Tomamos el triángulo AOB:



El triángulo AOB es un triángulo isósceles porque los segmentos OA= OB= r= 20.

Hallamos el ángulo central del pentágono regular, en este caso, el ángulo "O" (Es el formado por dos radios consecutivos)

$$O = \frac{360}{n} = \frac{360}{5} = 72^\circ$$

Por ser AOB un triángulo isósceles. Los ángulos α y β son iguales, luego:

$$180^\circ = 72^\circ + \alpha + \beta = 72^\circ + 2\alpha$$

$$2\alpha = 180^\circ - 72^\circ = 108^\circ$$

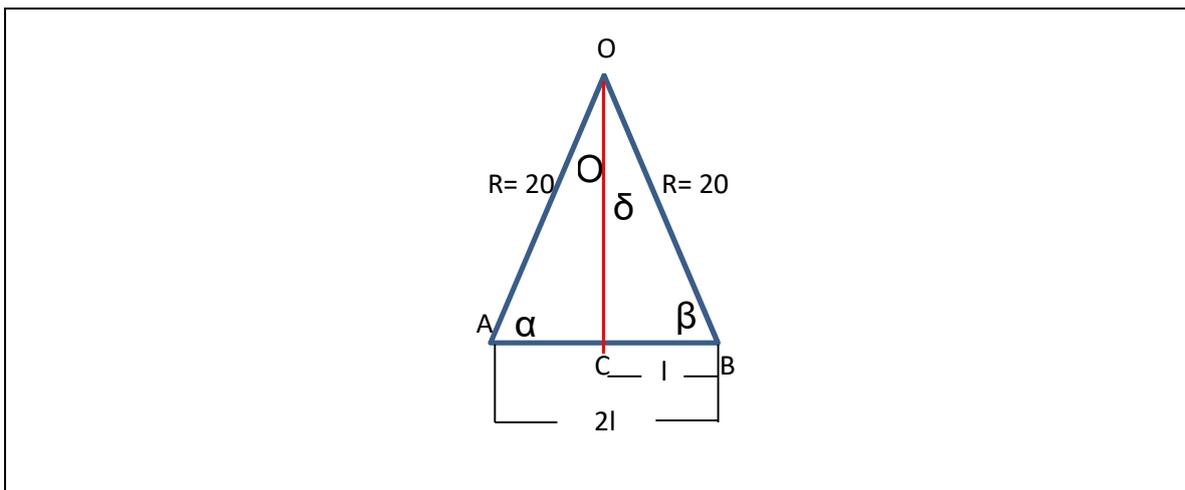
$$\alpha = \frac{108}{2} = 54^\circ$$

Por tanto los ángulos α y β miden 54° respectivamente.

Ahora hallamos el valor de la apotema, para ello tomamos el triángulo OCB.

La apotema $ap= OC$ divide en ángulo central O en dos partes iguales, y es perpendicular al lado, luego:

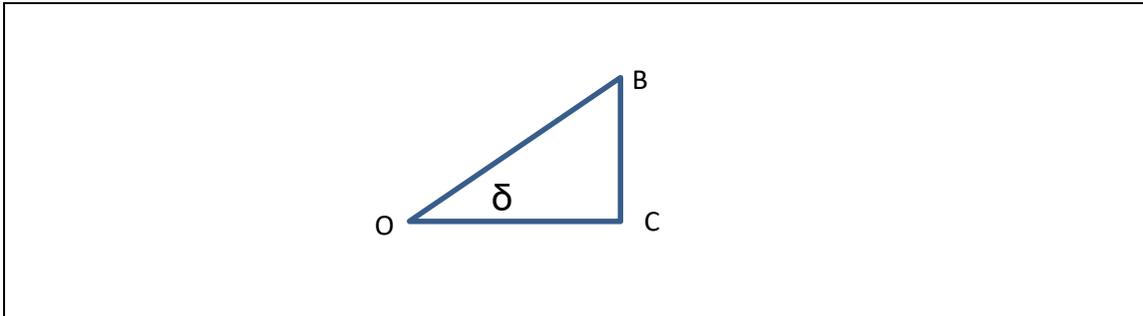
$$\delta = \frac{72^\circ}{2} = 36^\circ$$



Tomando el triángulo rectángulo OCB, podemos calcular la apotema OC, para mayor facilidad giramos el triángulo en el sentido contrario a las agujas del reloj de manera que el lado OC, la apotema, quede horizontal.

Recordamos que OB= r= 20

Igualmente para mayor facilidad en el cálculo, el lado $AB = 2l$, de manera que $CB = l$



$$\cos \delta = \frac{OC}{OB}$$

$$\cos 36^\circ = \frac{OC}{20}$$

$$OC = 20 \cdot \cos 36^\circ = 20 \cdot 0,809 = 16,18 \text{ m aproximadamente}$$

La apotema: $ap = OC = 16,18 \text{ m aproximadamente}$.

A continuación, hallamos el segmento BC

$$\text{sen } \delta = \frac{BC}{OB}$$

$$\text{sen } 36^\circ = \frac{BC}{20} = \frac{l}{20}$$

$$l = 20 \cdot \text{sen } 36^\circ = 20 \cdot 0,587 = 11,74 \text{ m aproximadamente}$$

Por tanto, el lado AB del triángulo ABO será:

$$AB = 2l = 2 \cdot 11,74 = 23,48 \text{ m aproximadamente}$$

Finalmente, calculamos el área del pentágono regular:

$$A = \frac{\text{perímetro} \times \text{apotema}}{2} = \frac{5l \times OC}{2} = \frac{5 \cdot 23,48 \times 16,18}{2} = 949,766 \text{ m}^2 \text{ apro}$$