PROBLEMAS DE TRIGONOMETRÍA

Problema 169:

Demostrar que se verifica la igualdad siguiente:

$$tg\ \frac{a}{2} + 2\ sen^2 \frac{a}{2} \cdot cotg\ a = sen\ a$$

Solución Problema 169:

$$tg\ \frac{a}{2} + 2\ sen^2 \frac{a}{2} \cdot cotg\ a$$

Sabemos que:

$$2\ sen^2 \frac{a}{2} = 1 - \cos a$$

Luego:

$$tg\ \frac{a}{2} + (1 - \cos a) \cdot cotg\ a = \frac{\operatorname{sen} \frac{a}{2}}{\cos \frac{a}{2}} + (1 - \cos a) \cdot cotg\ a$$

Sabemos que:

$$sen\ a = 2sen\ \frac{a}{2} \cdot \cos \frac{a}{2}$$

Luego,

$$sen\ \frac{a}{2} = \frac{sen\ a}{2\cos\frac{a}{2}}$$

Así:

$$\frac{\frac{sen\ a}{2\cos\frac{a}{2}}}{\cos\frac{a}{2}} + (1-\cos a)\cdot cotg\ a = \frac{sen\ a}{2cos^2\frac{a}{2}} + (1-\cos a)\cdot cotg\ a$$

Sabemos que:

$$2cos^2\frac{a}{2} = 1+\cos a$$

Luego,

$$\frac{sen\ a}{2cos^2\frac{a}{2}} + (1-\cos a)\cdot cotg\ a = \frac{sen\ a}{1+\cos a} + (1-\cos a)\cdot cotg\ a = \frac{sen\ a + (1+\cos a)\cdot(1-\cos a)\cdot cotg\ a}{1+\cos a} =$$

$$\frac{sen\ a + (1-\ cos^2 a)\cdot cotg\ a}{1+\cos a} = \frac{sen\ a +\ sen^2 a\cdot cotg\ a}{1+\cos a} = \frac{sen\ a +\ sen^2 a\cdot\frac{\cos a}{sen\ a}}{1+\cos a} = \frac{sen\ a + sen\ a\cdot\cos a}{1+\cos a} =$$

$$\frac{sen\ a(1+\cos a)}{1+\cos a} = sen\ a$$