

## PROGRESIONES GEOMÉTRICAS

### Problema 59:

La suma de tres números en progresión geométrica es 70. Si el primero se multiplica por 4, el segundo por 5 y el tercero por 4. Los números resultantes estarán en progresión aritmética. Hallar los tres números.

### Solución Problema 59:

Sean  $a_1$ ,  $a_2$  y  $a_3$  los dos números pedidos.

La suma de tres números en progresión geométrica es 70

$$a_1 + a_2 + a_3 = 70$$

$$a_2 = 70 - a_1 - a_3 \text{ ecuación 1}$$

PROGRESIÓN GEOMÉTRICA	PROGRESIÓN ARITMÉTICA
$a_1 = a_1$ $a_2 = a_1 \cdot r$ $a_3 = a_1 \cdot r^2$ Sabemos que: $r = \frac{a_2}{a_1}$ $r = \frac{a_3}{a_2}$ $\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2}$ $a_2^2 = a_3 \cdot a_1 \text{ ecuación 2}$	$b_1 = 4a_1$ $b_2 = 5a_2 = b_1 + d = 4a_1 + d$ $b_3 = 4a_3 = b_1 + 2d = 4a_1 + 2d$ Sabemos que: $d = b_2 - b_1$ $d = b_3 - b_2$ $b_2 - b_1 = b_3 - b_2$ $2b_2 = b_3 + b_1$ $2(5a_2) = 4a_3 + 4a_1$ $5a_2 = 2a_3 + 2a_1$ $a_2 = \frac{2a_3 + 2a_1}{5} \text{ ecuación 3}$

De la ecuación 1 y la 3 obtenemos:

$$a_2 = 70 - a_1 - a_3 \text{ ecuación 1}$$

$$a_2 = \frac{2a_3 + 2a_1}{5} \text{ ecuación 3}$$

$$\frac{2a_3 + 2a_1}{5} = 70 - a_1 - a_3$$

$$2a_3 + 2a_1 = 350 - 5a_1 - 5a_3$$

$$7a_3 + 7a_1 = 350$$

Simplificando por 7:

$$a_3 + a_1 = 50$$

$$a_3 = 50 - a_1 \text{ ecuación 4}$$

De la ecuación 1 y la 2 obtenemos:

$$a_2 = 70 - a_1 - a_3 \text{ ecuación 1}$$

$$a_2^2 = a_3 \cdot a_1 \text{ ecuación 2}$$

$$(70 - a_1 - a_3)^2 = a_3 \cdot a_1$$

$$(70 - a_1 - a_3) \cdot (70 - a_1 - a_3) = a_3 \cdot a_1$$

$$4900 - 70a_1 - 70a_3 - 70a_1 + a_1^2 + a_3 \cdot a_1 - 70a_3 + a_3 \cdot a_1 + a_3^2 = a_3 \cdot a_1$$

$$4900 - 70a_1 - 70a_3 - 70a_1 + a_1^2 + a_3 \cdot a_1 - 70a_3 + a_3 \cdot a_1 + a_3^2 - a_3 \cdot a_1 = 0$$

$$a_1^2 + a_3 \cdot a_1 - 140a_1 - 140a_3 + a_3^2 + 4900 = 0 \text{ ecuación 5}$$

De la ecuación 4 y 5 obtenemos:

$$a_3 = 50 - a_1 \text{ ecuación 4}$$

$$a_1^2 + a_3 \cdot a_1 - 140a_1 - 140a_3 + a_3^2 + 4900 = 0 \text{ ecuación 5}$$

$$a_1^2 + (50 - a_1) \cdot a_1 - 140a_1 - 140(50 - a_1) + (50 - a_1)^2 + 4900 = 0$$

$$a_1^2 + 50a_1 - a_1^2 - 140a_1 - 7000 + 140a_1 + 2500 + a_1^2 - 100a_1 + 4900 = 0$$

$$a_1^2 - 50a_1 + 400 = 0$$

$$a_1 = \frac{50 \pm \sqrt{2500 - 1600}}{2} = \frac{50 \pm \sqrt{900}}{2} = \frac{50 \pm 30}{2}$$

$$a_{11} = \frac{50 + 30}{2} = 40$$

$$a_{12} = \frac{50 - 30}{2} = 10$$

Para  $a_1 = 40$ ,  $a_3$  y  $a_2$  serán

$$a_3 = 50 - a_1 \text{ ecuación 4}$$

$$a_3 = 50 - 40 = 10$$

$$a_2 = \frac{2a_3 + 2a_1}{5} \text{ ecuación 3}$$

$$a_2 = \frac{2 \cdot 10 + 2 \cdot 40}{5} = 20$$

O bien serán:

Para  $a_1 = 10$ ,  $a_3$  y  $a_2$  serán

$$a_3 = 50 - a_1 \text{ ecuación 4}$$

$$a_3 = 50 - 10 = 40$$

$$a_2 = \frac{2a_3 + 2a_1}{5} \text{ ecuación 3}$$

$$a_2 = \frac{2 \cdot 40 + 2 \cdot 10}{5} = 20$$

Los números son: 10, 20 y 40