

PROGRESIONES GEOMÉTRICAS

Problema 58:

Hallar dos números cuya diferencia es 32 y cuya media aritmética excede a la geométrica en 4

Solución Problema 58:

Sean a_1 y a_2 los dos números, y “x” la media aritmética y “G” la media geométrica.

Sabemos que:

a_1, x, a_2 están en progresión aritmética, luego:

$$d = x - a_1$$

$$d = a_2 - x$$

Luego, igualando en d:

$$x - a_1 = a_2 - x$$

$$2x = a_2 + a_1 \text{ ecuación 1}$$

Sabemos que:

a_1, G, a_2 están en progresión geométrica, luego:

$$r = \frac{G}{a_1}$$

$$r = \frac{a_2}{G}$$

Igualando en r:

$$\frac{G}{a_1} = \frac{a_2}{G}$$

$$G^2 = a_1 \cdot a_2 \text{ ecuación 2}$$

El enunciado nos dice que la media aritmética excede a la geométrica en 4:

$$x = G + 4$$

$$G = x - 4 \text{ ecuación 3}$$

El enunciado también nos dice que los dos números se diferencian en 32:

$$a_1 - a_2 = 32$$

$$a_1 = 32 + a_2 \text{ ecuación 4}$$

Sustituyendo el valor de a_1 de la ecuación 4 en la 2, tenemos:

$$a_1 = 32 + a_2 \text{ ecuación 4}$$

$$G^2 = a_1 \cdot a_2 \text{ ecuación 2}$$

$$G^2 = (32 + a_2) \cdot a_2 \text{ ecuación 5}$$

Sustituyendo el valor de G de la ecuación 3 en la 5:

$$G = x - 4 \text{ ecuación 3}$$

$$G^2 = (32 + a_2) \cdot a_2 \text{ ecuación 5}$$

$$(x - 4)^2 = (32 + a_2) \cdot a_2$$

$$x^2 + 16 - 8x = 32a_2 + a_2^2 \text{ ecuación 6}$$

Sustituyendo el valor de a_1 de la ecuación 4 en la ecuación 1:

$$a_1 = 32 + a_2 \text{ ecuación 4}$$

$$2x = a_2 + a_1 \text{ ecuación 1}$$

$$2x = a_2 + (32 + a_2) = a_2 + 32 + a_2 = 2a_2 + 32$$

$$2x = 2a_2 + 32$$

Simplificando por 2.

$$x = a_2 + 16 \text{ ecuación 7}$$

Sustituyendo el valor de x de la ecuación 7 en la 6:

$$x = a_2 + 16 \text{ ecuación 7}$$

$$x^2 + 16 - 8x = 32a_2 + a_2^2 \text{ ecuación 6}$$

$$(a_2 + 16)^2 + 16 - 8(a_2 + 16) = 32a_2 + a_2^2$$

$$a_2^2 + 256 + 32a_2 + 16 - 8a_2 - 128 = 32a_2 + a_2^2$$

$$8a_2 = 256 - 128 + 16 = 144$$

$$a_2 = \frac{144}{8} = 18 \text{ es el valor del 2º número}$$

El 1er número será:

$$a_1 = 32 + a_2 \text{ ecuación 4}$$

$$a_1 = 32 + 18 = 50$$