

PROGRESIONES GEOMÉTRICAS

Problema 54:

En una progresión geométrica el segundo término excede al primero en 4 unidades y la suma del segundo y tercero es 24. Demostrar que es posible encontrar dos progresiones geométricas que satisfagan estas condiciones y hallar la suma de los cinco primeros términos de cada una de ellas.

Solución Problema 54:

Sabemos que:

$$a_2 = a_1 + 4$$

Ponemos esta expresión en función de a_1 :

$$a_1 \cdot r = a_1 + 4$$

$$r = \frac{a_1 + 4}{a_1} \text{ ecuación 1}$$

Sabemos también que:

$$a_2 + a_3 = 24$$

Ponemos esta expresión en función de a_1 :

$$(a_1 \cdot r) + (a_1 \cdot r^2) = 24 \text{ ecuación 2}$$

Sustituyendo el valor de r de la ecuación 1 en la 2:

$$\left(a_1 \cdot \frac{a_1 + 4}{a_1} \right) + \left[a_1 \cdot \left(\frac{a_1 + 4}{a_1} \right)^2 \right] = 24$$

$$a_1 + 4 + \left[a_1 \cdot \frac{a_1^2 + 16 + 8a_1}{a_1^2} \right] = 24$$

$$a_1 + 4 + \left[\frac{a_1^2 + 16 + 8a_1}{a_1} \right] = 24$$

$$a_1^2 + 4a_1 + a_1^2 + 16 + 8a_1 = 24a_1$$

$$2a_1^2 - 12a_1 + 16 = 0$$

Simplificando por 2:

$$a_1^2 - 6a_1 + 8 = 0$$

$$a_1 = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 32}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{6 \pm 2}{2}$$

$$a_{11} = \frac{6 + 2}{2} = 4 \text{ solución válida. Da lugar a una P.G.}$$

$$a_{12} = \frac{6 - 2}{2} = 2 \text{ solución válida Da lugar a otra P.G.}$$

Para $a_{11} = 4$

$$a_1 = 4$$

$$a_2 = a_1 + 4 = 4 + 4 = 8$$

La razón será:

$$r = \frac{a_2}{a_1} = \frac{8}{4} = 2$$

El quinto término será:

$$a_5 = a_1 \cdot r^4 = 4 \cdot 2^4 = 4 \cdot 16 = 64$$

La suma de los 5 primeros términos será:

$$S_5 = \frac{a_5 \cdot r - a_1}{r - 1} = \frac{64 \cdot 2 - 4}{2 - 1} = 124$$

Para $a_{12} = 2$

$$a_1 = 2$$

$$a_2 = a_1 + 4 = 2 + 4 = 6$$

La razón será:

$$r = \frac{a_2}{a_1} = \frac{6}{2} = 3$$

El quinto término será:

$$a_5 = a_1 \cdot r^4 = 2 \cdot 3^4 = 2 \cdot 81 = 162$$

La suma de los 5 primeros términos será:

$$S_5 = \frac{a_5 \cdot r - a_1}{r - 1} = \frac{162 \cdot 3 - 2}{3 - 1} = 242$$