PROGRESIONES ARITMÉTICAS

Problema 57:

Dividir 20 en cuatro partes que estén en progresión aritmética y tales que el producto de la primera por la cuarta sea al producto de la segunda por la tercera como 2:3

Solución Problema 57:

Sea:

$a_1 = a_1$

$a_2 = a_1 + d$

$a_3 = a_1 + 2d$

$a_4 = a_1 + 3d$

Sabemos que:

$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 20$

$a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + (a_1 + 3d) = 20$

$a_1 + a_1 + d + a_1 + 2d + a_1 + 3d = 20$

$4a_1 + 6d = 20$

Simplificando por 2:

$2a_1 + 3d = 10$

Despejando d:

$$d = \frac{10 - 2a_1}{3} \; ecuación \; 1$$

Por otra parte, el enunciado nos dice: que el producto de la primera por la cuarta sea al producto de la segunda por la tercera como 2:3

$$\frac{a_1 \cdot (a_1 + 3d)}{(a_1 + d) \cdot (a_1 + 2d)} = \frac{2}{3}$$

Operando:

$$3 \cdot a_1 \cdot (a_1 + 3d) = 2 \cdot (a_1 + d) \cdot (a_1 + 2d)$$

$$3{a_1}^2 + 9a_1 d = 2{a_1}^2 + 6a_1 d + 4d^2$$

$$3{a_1}^2 - 2{a_1}^2 + 9a_1 d - 6a_1 d - 4d^2 = 0$$

$${a_1}^2 + 3a_1 d - 4d^2 = 0 \quad ecuación\ 2$$

Sustituyendo el valor de “d” de la ecuación 1:

$${a_1}^2 + 3a_1(\frac{10 - 2a_1}{3}) - 4(\frac{10 - 2a_1}{3})^2 = 0$$

$${a_1}^2 + 10a_1 - 2{a_1}^2 - 4(\frac{100 + 4{a_1}^2 - 40a_1}{9}) = 0$$

$$9{a_1}^2 + 90a_1 - 18{a_1}^2 - 400 - 16{a_1}^2 + 160a_1 = 0$$

$$-25{a_1}^2 + 250a_1 - 400 = 0$$

$$25{a_1}^2 - 250a_1 + 400 = 0$$

$${a_1}^2 - 10a_1 + 16 = 0$$

$$a_1 = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 64}}{2} = \frac{10 \pm \sqrt{36}}{2} = \frac{10 \pm 6}{2}$$

$$a_{11} = \frac{10 + 6}{2} = \frac{16}{2} = 8 \ \ solución\ válida$$

$$a_{12} = \frac{10 - 6}{2} = \frac{4}{2} = 2 \ \ solución\ válida$$

Para $a_1 = 8$

$$d = \frac{10 - 2a_1}{3} \ \ ecuación\ 1$$

$$d = \frac{10 - 2 \cdot 8}{3} = \frac{10 - 16}{3} = \frac{-6}{3} = -2$$

Las partes pedidas son:

$$a_1 = a_1 = 8$$

$$a_2 = a_1 + d = 8 - 2 = 6$$

$a_3 = a_1 + 2d = 8 - 4 = 4$

$a_4 = a_1 + 3d = 8 - 6 = 2$

Y se cumple que:

$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 20$

$8 + 6 + 4 + 2 = 20$

Para a_1= 2

$$d = \frac{10 - 2a_1}{3}\ ecuación\ 1$$

$$d = \frac{10 - 2 \cdot 2}{3} = \frac{10 - 4}{3} = \frac{6}{3} = 2$$

Las partes pedidas son:

$a_1 = a_1 = 2$

$a_2 = a_1 + d = 2 + 2 = 4$

$a_3 = a_1 + 2d = 2 + 4 = 6$

$a_4 = a_1 + 3d = 2 + 6 = 8$

Y se cumple que:

$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 20$

$2 + 4 + 6 + 8 = 20$

También puede resolverse partiendo de la ecuación 1:

$$d = \frac{10 - 2a_1}{3}\ ecuación\ 1$$

Y resolviendo:

$$\frac{a_1 \cdot (a_1 + 3d)}{(a_1 + d) \cdot (a_1 + 2d)} = \frac{2}{3}$$

De manera que:

$3 \cdot a_1 \cdot (a_1 + 3d) = 2 \cdot (a_1 + d) \cdot (a_1 + 2d)$

Resolviendo esta igualdad, queda la siguiente ecuación de 2º grado:

$a_1{}^2 + 3a_1 d - 4\mathrm{d}^2 = 0$

Tomando a a_1 como la incógnita, resolvemos la ecuación:

$$a_1 = \frac{-3d \pm \sqrt{9\mathrm{d}^2 + 16\mathrm{d}^2}}{2} = \frac{-3d \pm \sqrt{25\mathrm{d}^2}}{2} = \frac{-3d \pm 5\mathrm{d}}{2}$$

$$a_{11} = \frac{-3d + 5\mathrm{d}}{2} = \mathrm{d} \;\; solución\ válida$$

$$a_{12} = \frac{-3d - 5\mathrm{d}}{2} = -4\mathrm{d} \;\; solución\ válida$$

Sustituyendo los valores de a_{11} y a_{12} en la ecuación 1 se obtienen los mismos valores que en la resolución anterior.