

PROGRESIONES GEOMÉTRICAS

Problema 53:

Dividir 195 en tres partes que formen una progresión geométrica de modo que el tercer término exceda al primero en 120.

Solución Problema 53:

Sabemos que:

$$a_1 = a_1$$

$$a_2 = a_1 \cdot r$$

$$a_3 = a_1 \cdot r^2 = a_1 + 120$$

De donde:

$$a_1 \cdot r^2 - a_1 = 120$$

$$a_1(r^2 - 1) = 120$$

$$a_1 = \frac{120}{r^2 - 1} \text{ ecuación 1}$$

Por otra parte:

$$a_1 + a_2 + a_3 = 195$$

Ponemos los tres elementos en función de a_1 :

$$a_1 + (a_1 \cdot r) + (a_1 \cdot r^2) = 195$$

$$a_1 + a_1 \cdot r + a_1 \cdot r^2 = 195$$

$$a_1(1 + r + r^2) = 195$$

$$a_1 = \frac{195}{1 + r + r^2} \text{ ecuación 2}$$

Igualando en a_1 las ecuaciones 1 y 2:

$$\frac{120}{r^2 - 1} = \frac{195}{1 + r + r^2}$$

$$120(1 + r + r^2) = 195(r^2 - 1)$$

$$120 + 120r + 120r^2 = 195r^2 - 195$$

$$75r^2 - 120r - 315 = 0$$

Simplificando por 15:

$$5r^2 - 8r - 21 = 0$$

$$r = \frac{8 \pm \sqrt{64 + 420}}{10} = \frac{8 \pm \sqrt{484}}{10} = \frac{8 \pm 22}{10}$$

$$r_1 = \frac{8 + 22}{10} = 3 \text{ solución válida}$$

$$r_2 = \frac{8 - 22}{10} = -1,4 \text{ solución no válida}$$

Hallamos los tres números o partes:

$$a_1 = \frac{120}{r^2 - 1} \text{ ecuación 1}$$

$$a_1 = \frac{120}{3^2 - 1} = \frac{120}{8} = 15$$

$$a_2 = a_1 \cdot r = 15 \cdot 3 = 45$$

$$a_3 = a_1 \cdot r^2 = a_1 + 120 = 15 + 120 = 135$$