

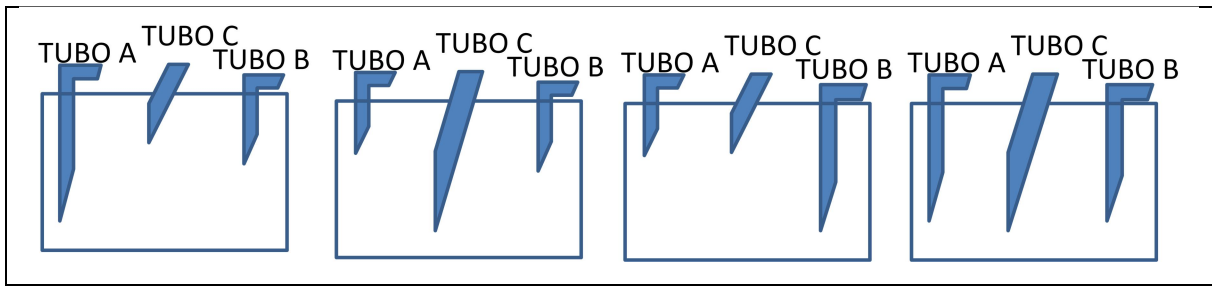
PROBLEMAS DE GRIFOS, FUENTES Y MANANTIALES

Problema 14:

Tres tubos, A, B y C, pueden echar agua en una cisterna o sacarla de ella. Si A y B la echan y C la saca, la cisterna se llena en tres horas. Si A y C la echan y B la saca, la cisterna se llena en 2 horas. Si los tres tubos la echan juntos, la cisterna se llena en 1 hora. ¿Cuánto tiempo empleará cada tubo en llenarla solo?

Solución Problema 14:

Paso 1: Hacer un croquis del problema



Paso 2:

Sea $1/x$ la cantidad de cisterna que llena en 1 hora el tubo A

Sea $1/y$ la cantidad de cisterna que llena o vacía en 1 hora el tubo B

Sea $1/z$ la cantidad de cisterna que llena o vacía en 1 hora el tubo C

Así, el tubo A y el tubo B echan agua, y el tubo C la saca en una hora llenando $1/3$:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \frac{1}{z} = \frac{1}{3} \text{ ecuación 1}$$

Así, el tubo A y el tubo C echan agua, y el tubo B la saca en una hora llenando $1/2$:

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{2} \text{ ecuación 2}$$

Así, el tubo A, el B y el C echan agua en una hora llenando 1/1:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{1} \text{ ecuación 3}$$

De la ecuación 1 y 3 tenemos:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \frac{1}{z} = \frac{1}{3}; \quad \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{3} + \frac{1}{z}$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1; \quad \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1 - \frac{1}{z}$$

Luego:

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{z} = 1 - \frac{1}{z}$$

$$\frac{1}{z} + \frac{1}{z} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{3-1}{3} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{2}{z} = \frac{2}{3}$$

z = 3 horas tarda el tubo C en llenar la cisterna

Sustituimos z por su valor en la ecuación 2 y 3:

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{y} + \frac{1}{3} = \frac{1}{2}; \quad \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{3-2}{6} = \frac{1}{6}; \quad \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{6}$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{3} = 1; \quad \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{3-1}{3} = \frac{2}{3}; \quad \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{2}{3}$$

Sumando ambas ecuaciones tenemos:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x} = \frac{1}{6} + \frac{2}{3}$$

$$\frac{2}{x} = \frac{1+4}{6} = \frac{5}{6}$$

$$\frac{2}{x} = \frac{5}{6}$$

$$x = \frac{12}{5} \text{ horas tarda el tubo A en llenar la cisterna}$$

Sustituimos x por su valor:

$$\frac{1}{\frac{12}{5}} + \frac{1}{y} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{5}{12} + \frac{1}{y} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{1}{y} = \frac{2}{3} - \frac{5}{12} = \frac{8 - 5}{12} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$$

$$y = 4 \text{ horas tarda el tubo B en llenar la cisterna}$$