

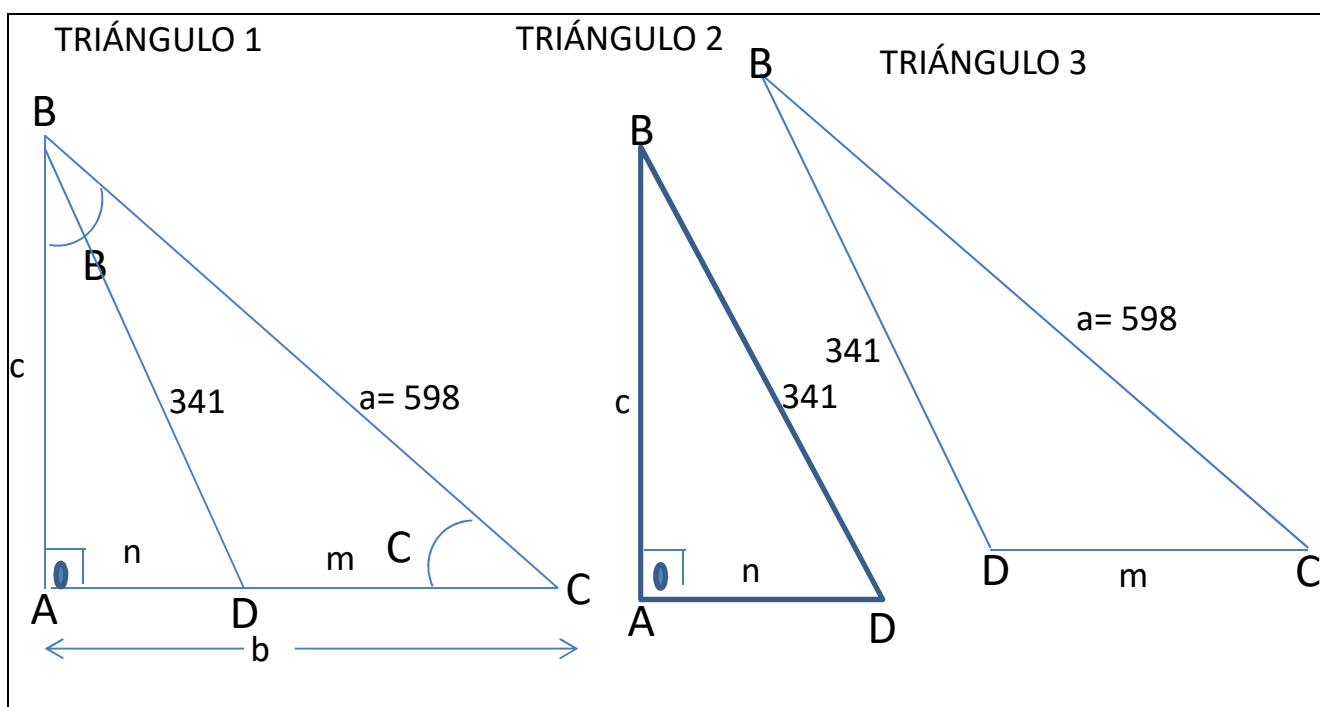
PROBLEMAS DE TRIGONOMETRÍA

Problema 142:

La bisectriz correspondiente al ángulo B de un triángulo rectángulo, mide 341 m, y la hipotenusa, $a = 598$ m. Resolver el triángulo.

Solución Problema 142:

Hacemos el croquis:



En el triángulo 1:

Aplicando la propiedad de la bisectriz:

$$\frac{BA}{BC} = \frac{AD}{DC}$$

$$\frac{c}{a} = \frac{n}{m}$$

$$m \cdot c = a \cdot n$$

$$m \cdot c = 598 \cdot n$$

$$m = \frac{598 \cdot n}{c} \text{ ecuación 1}$$

Sabemos que:

$$b = n + m$$

$$n = b - m$$

Sustituimos n en la ecuación 1:

$$m = \frac{598 \cdot n}{c} \text{ ecuación 1}$$

$$m = \frac{598 \cdot (b - m)}{c}$$

$$m \cdot c = 598 \cdot (b - m)$$

$$m \cdot c = 598b - 598m$$

$$598m + m \cdot c = 598b$$

$$m(598 + c) = 598b$$

$$m = \frac{598b}{(598 + c)} \text{ ecuación 2}$$

En el triángulo 2:

$$\cos \frac{B}{2} = \frac{c}{341} \text{ ecuación 3}$$

En el triángulo 3:

Aplicando el teorema del coseno:

$$m^2 = 598^2 + 341^2 - 2 \cdot 598 \cdot 341 \cdot \cos \frac{B}{2} \text{ ecuación 4}$$

Sustituyendo en la ecuación 4 el valor del coseno de la ecuación 3:

$$m^2 = 598^2 + 341^2 - 2 \cdot 598 \cdot 341 \cdot \frac{c}{341}$$

Operando:

$$m^2 = 357604 + 116281 - 1196c$$

$$m^2 = 473885 - 1196c \text{ ecuación 5}$$

Igualando en m las ecuaciones 2 y 5, queda:

$$m = \frac{598b}{(598 + c)} \text{ ecuación 2}$$

$$m^2 = 473885 - 1196c \text{ ecuación 5}$$

$$\left[\frac{598b}{(598 + c)}\right]^2 = 473885 - 1196c$$

$$\frac{598^2 b^2}{(598 + c)^2} = 473885 - 1196c \text{ ecuación 6}$$

En el triángulo 1, aplicando el teorema de Pitágoras:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$b^2 = a^2 - c^2$$

Sustituimos el valor de b en la ecuación 6:

$$\frac{598^2(a^2 - c^2)}{(598 + c)^2} = 473885 - 1196c$$

$$\frac{598^2(598^2 - c^2)}{(598 + c)^2} = 473885 - 1196c$$

$$\frac{598^2(598 + c)(598 - c)}{(598 + c)^2} = 473885 - 1196c$$

$$\frac{598^2(598 - c)}{(598 + c)} = 473885 - 1196c$$

$$598^3 - 598^2c = (473885 - 1196c)(598 + c)$$

$$213847192 - 357604c = 473885c - 1196c^2 + 283383230 - 715208c$$

$$1196c^2 - 116281c - 69536038 = 0$$

$$c = \frac{116281 \pm \sqrt{13521270961 + 332660405792}}{2392}$$

$$c = \frac{116281 \pm \sqrt{346181676753}}{2392} = \frac{116281 \pm 588372,056}{2392}$$

$$c_1 = \frac{116281 + 588372,056}{2392} = 294,587 \text{ m}$$

$$c_2 = \frac{116281 - 588372,056}{2392} = -472091,056 \text{ solución no válida}$$

Para $c = 294,587$

Hallamos b :

$$b^2 = a^2 - c^2$$

$$b = \sqrt{598^2 - 294,587^2} = 520,405 \text{ m}$$

Hallamos los ángulos B y C :

$$\cos \frac{B}{2} = \frac{c}{341} \text{ ecuación 3}$$

$$\cos \frac{B}{2} = \frac{294,587}{341}$$

$$\frac{B}{2} = \arccos \frac{294,587}{341}$$

$$\frac{B}{2} = 30^\circ,243$$

$$B = 2 \cdot 30^\circ,243 = 60^\circ,487 = 60^\circ 29' 14''$$

$$C = 90^\circ - 60^\circ,487 = 29^\circ,513 = 29^\circ 30' 46''$$