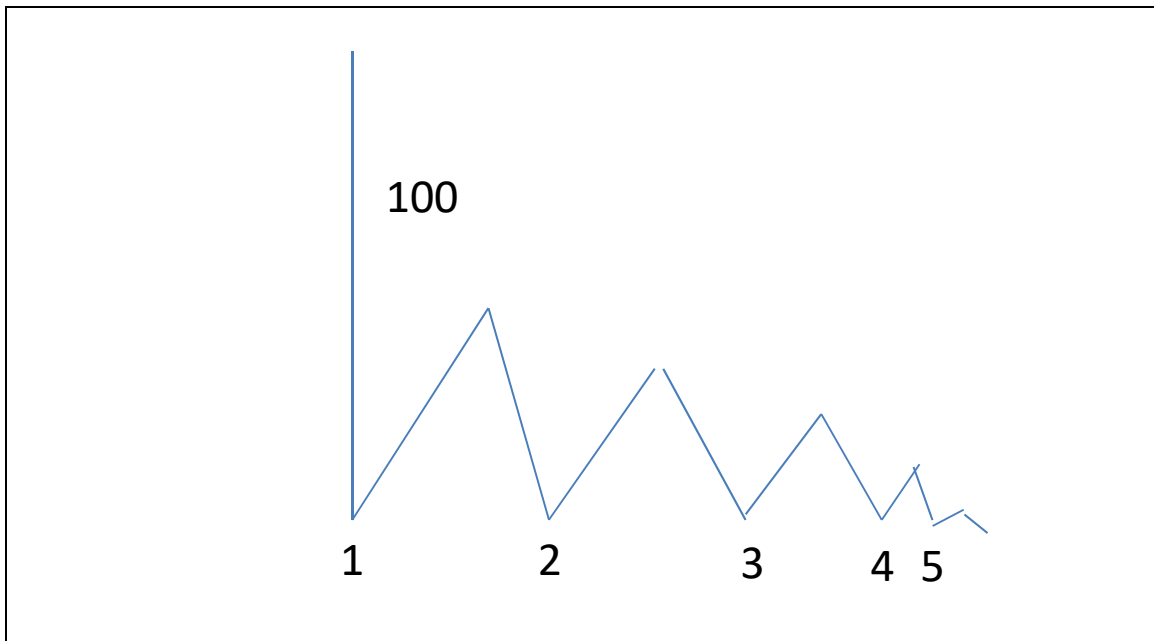


PROGRESIONES GEOMÉTRICAS

Problema 25:

Una pelota cae de la altura de 100 m. y rebota hasta la quinta parte después de cada caída. ¿Cuál será el camino recorrido después de la quinta caída?

Solución Problema 25:



Es un dibujo esquemático que representa el bote de la pelota.

Cae desde una altura de 100 metros y en cada rebote sube $\frac{1}{5}$ de la caída.

Para calcular la distancia, contamos la subida y la bajada de cada bote, por tanto habrá que multiplicar por 2.

Para ello, calcularemos la distancia total que recorre y le restaremos la distancia que recorre hasta el quinto bote.

Distancia que recorre la pelota hasta el 5º rebote:

1ª caída: 100 metros

2ª caída:

$$100 \cdot \frac{1}{5}$$

3ª caída:

$$100 \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5}$$

4ª caída:

$$100 \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5}$$

5ª caída:

$$100 \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5}$$

La distancia que recorre será:

$$d_5 = 100 + 2\left[\left(100 \cdot \frac{1}{5}\right) + \left(100 \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5}\right) + \left(100 \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5}\right) + \left(100 \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5}\right)\right]$$

Sacamos factor común:

$$100 \cdot \frac{1}{5}$$

$$d_5 = 100 + 2\left(100 \cdot \frac{1}{5}\right)\left[1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{25} + \frac{1}{125}\right]$$

Luego,

$$\left[1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{25} + \frac{1}{125}\right]$$

Es una progresión geométrica de 4 términos:

$$S_n = \frac{a_n \cdot r - a_1}{r - 1}$$

Luego,

$$S_4 = \frac{\frac{1}{125} \cdot \frac{1}{5} - 1}{\frac{1}{5} - 1} = \frac{\frac{1}{625} - 1}{\frac{-4}{5}} = \frac{\frac{-624}{625}}{\frac{-4}{5}} = \frac{624 \cdot 5}{4 \cdot 625} = \frac{156}{125}$$

Por tanto:

$$d_5 = 100 + 2\left(100 \cdot \frac{1}{5}\right) \cdot \frac{156}{125} = 100 + \frac{6240}{125} = 149,92 \text{ metros}$$

Distancia total que recorre la pelota:

1ª caída: 100 metros

2ª caída:

$$100 \cdot \frac{1}{5}$$

3ª caída:

$$100 \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5}$$

4ª caída:

$$100 \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5}$$

5ª caída:

$$100 \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5}$$

6ª caída:

$$100 \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5}$$

Así hasta la caída enésima

$$d_t = 100 + 2 \left[\left(100 \cdot \frac{1}{5} \right) + \left(100 \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} \right) + \left(100 \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} \right) + \left(100 \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} \right) + \dots \right]$$

Sacamos factor común:

$$100 \cdot \frac{1}{5}$$

$$d_t = 100 + 2 \left(100 \cdot \frac{1}{5} \right) \left[1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{25} + \frac{1}{125} + \frac{1}{625} + \dots \right]$$

Sabemos que la suma de la progresión geométrica ilimitada es:

$$S_n = \frac{a_1}{1 - r}$$

$$S_n = \frac{1}{1 - \frac{1}{5}} = \frac{1}{\frac{4}{5}} = \frac{5}{4}$$

Por tanto:

$$d_t = 100 + 2 \left(100 \cdot \frac{1}{5} \right) \frac{5}{4} = 100 + 50 = 150 \text{ metros}$$

Luego la distancia que recorre después del 5º bote será:

$$d_{t-5} = 150 - 149,92 = 0,08 \text{ metros}$$