

PROGRESIONES ARITMÉTICAS

Problema 54:

Encuentra una sucesión de cuatro números, el primero de los cuales es 6 y el cuarto es 16, donde los tres primeros forman una progresión aritmética y los tres últimos una progresión geométrica

Solución Problema 54:

La progresión será:

$$a_1; a_2; a_3; a_4$$

La progresión aritmética será:

$$a_1; a_2; a_3;$$

Sabemos que:

$$a_1 = 6$$

$$a_1 = a_2 - d$$

$$6 = a_2 - d \text{ ecuación 1}$$

$$a_3 = a_2 + d \text{ ecuación 2}$$

Sumando miembro a miembro la ecuación 1 y 2:

$$6 + a_3 = 2a_2 \text{ ecuación 3}$$

La progresión geométrica será:

$$a_2; a_3; a_4$$

Sabemos que:

$$a_4 = 16$$

$$a_2 = \frac{a_3}{r} \text{ ecuación 4}$$

$$a_4 = a_3 \cdot r$$

$$16 = a_3 \cdot r$$

$$r = \frac{16}{a_3} \text{ ecuación 5}$$

Sustituimos el valor de a_2 de la ecuación 4 en la ecuación 3:

$$6 + a_3 = \frac{2a_3}{r} \text{ ecuación 6}$$

Sustituimos el valor de r de la ecuación 5 en la ecuación 6:

$$6 + a_3 = \frac{2a_3}{\frac{16}{a_3}}$$

$$6 + a_3 = \frac{2a_3^2}{16}$$

$$96 + 16a_3 = 2a_3^2$$

$$2a_3^2 - 16a_3 - 96 = 0$$

$$a_3^2 - 8a_3 - 48 = 0$$

$$a_3 = \frac{8 \pm \sqrt{64 + 192}}{2} = \frac{8 \pm \sqrt{256}}{2} = \frac{8 \pm 16}{2}$$

$$a_{31} = \frac{8 + 16}{2} = \frac{24}{2} = 12$$

$$a_{32} = \frac{8 - 16}{2} = \frac{-8}{2} = -4$$

Para $a_3 = 12$: los cuatro números serán:

$$r = \frac{16}{a_3} \text{ ecuación 5}$$

$$r = \frac{16}{12} = \frac{4}{3}$$

$$a_2 = \frac{a_3}{r} \text{ ecuación 4}$$

$$a_2 = \frac{12}{\frac{4}{3}} = \frac{12 \cdot 3}{4} = 9$$

$$a_1 = 6$$

$$a_2 = 9$$

$$a_3 = 12$$

$$a_4 = 16$$

Para $a_3 = -4$: los cuatro números serán:

$$r = \frac{16}{a_3} \text{ ecuación 5}$$

$$r = \frac{16}{-4} = -4$$

$$a_2 = \frac{a_3}{r} \text{ ecuación 4}$$

$$a_2 = \frac{-4}{-4} = 1$$

$$a_1 = 6$$

$$a_2 = 1$$

$$a_3 = -4$$

$$a_4 = 16$$