PROBLEMAS DE TRIGONOMETRÍA

Problema 8:

Demostrar que se verifica la igualdad siguiente

$$tg\frac{1}{2}x + 2\mathrm{sen}^2\frac{1}{2}xcotgx = senx$$

Solución Problema 8:

$$tg\frac{1}{2}x + 2\mathrm{sen}^2\frac{1}{2}xcotgx = senx \quad igualdad\ 1$$

Sabemos que la fórmula de ángulo mitad para la tg es:

$$tg\frac{1}{2}x = \sqrt{\frac{1-\mathrm{cosx}}{1+\mathrm{cosx}}} = \frac{\sqrt{1-\mathrm{cosx}}}{\sqrt{1+\mathrm{cosx}}}$$

También sabemos que:

$$2\mathrm{sen}^2\frac{1}{2}x = 1 - cosx$$

Por tanto la igualdad 1 la podemos poner como:

$$\frac{\sqrt{1-\mathrm{cosx}}}{\sqrt{1+\mathrm{cosx}}} + (1-cosx)\frac{\mathrm{cosx}}{\mathrm{senx}} \quad igualdad\ 2$$

Multiplicando en el 1e término de la igualdad 2, numerador y denominador por:

$$\sqrt{1+\mathrm{cosx}}$$

Tenemos:

$$\frac{\sqrt{1-\mathrm{cosx}}\,\sqrt{1+\mathrm{cosx}}}{\sqrt{1+\mathrm{cosx}}\sqrt{1+\mathrm{cosx}}} + (1-cosx)\frac{\mathrm{cosx}}{\mathrm{senx}} =$$

$$\frac{\sqrt{1-\mathrm{cos}^2\mathrm{x}}}{1+\mathrm{cosx}} + \frac{(1-cosx)\mathrm{cosx}}{\mathrm{senx}} =$$

$$\frac{\sqrt{\mathrm{sen}^2\mathrm{x}}}{1+\mathrm{cosx}}+\frac{(1-cosx)\mathrm{cosx}}{\mathrm{senx}}= \quad \frac{\mathrm{senx}}{1+\mathrm{cosx}}+\frac{(1-cosx)\mathrm{cosx}}{\mathrm{senx}}$$

$$\frac{\mathrm{sen}^2\mathrm{x}+(1-cosx)(1+\mathrm{cosx})\mathrm{cosx}}{(1+\mathrm{cosx})\mathrm{senx}}= \quad \frac{\mathrm{sen}^2\mathrm{x}+(1-\mathrm{cos}^2\mathrm{x})\mathrm{cosx}}{(1+\mathrm{cosx})\mathrm{senx}}$$

$$\frac{\mathrm{sen}^2\mathrm{x}+\mathrm{sen}^2\mathrm{xcosx}}{(1+\mathrm{cosx})\mathrm{senx}}=\frac{\mathrm{sen}^2\mathrm{x}(1+\mathrm{cosx}\,)}{(1+\mathrm{cosx})\mathrm{senx}}=\frac{\mathrm{sen}^2\mathrm{x}}{\mathrm{senx}}= \boldsymbol{senx}$$