PROBLEMAS DE TRIGONOMETRÍA

Problema 33:

Obtener todas las soluciones de la siguiente ecuación, y deducir las válidas

$$\frac{sen2x.cosecx}{tgx} - cotgx.secx = 1$$

Solución Problema 33:

En este problema vamos a deducir todas las soluciones, y ver cuáles son soluciones de la ecuación.

$$\frac{sen2x.cosecx}{tgx} - cotgx.secx = 1$$

$$\frac{2\cancel{senx}.cosx.\frac{1}{\cancel{senx}}}{\frac{senx}{cosx}} - \frac{\cancel{cosx}}{senx}.\frac{1}{\cancel{cosx}} = 1$$

$$\frac{2cosx.cosx}{\mathrm{senx}} - \frac{1}{senx} = 1$$

$$\frac{2cos^2x}{\mathrm{senx}} - \frac{1}{senx} = 1$$

$$\frac{2cos^2x - 1}{\mathrm{senx}} = 1$$

$$2cos^2x - 1 = senx$$

$$2cos^2x - (sen^2x + cos^2x) = senx$$

$$2cos^2x - sen^2x - cos^2x = senx$$

$$cos^2x - sen^2x = senx$$

$$1 - sen^2x - sen^2x = senx$$

$$1 - 2sen^2x = senx$$

$$2sen^2x + senx - 1 = 0$$

Hacemos el siguiente cambio de variable:

$senx = t$

$2t^2 + t - 1 = 0$

$$t = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{4} = \frac{-1 \pm 3}{4}$$

$$\boldsymbol{t_1} = \frac{-1+3}{4} = \frac{2}{4} = \boldsymbol{\frac{1}{2}}$$

$$\boldsymbol{t_2} = \frac{-1-3}{4} = \frac{-4}{4} = \boldsymbol{-1}$$

Para t= 1/2, tenemos:

$senx = t$

$$senx = \frac{1}{2}$$

$$x = arcsen\frac{1}{2} = 30$$

Como el seno es positivo en el 1º y 2º cuadrante, las soluciones son:

$x = 30º$

$x = 180º - 30º = 150º$

Comprobamos si son solución de la ecuación, para ello sustituimos el valor de x en la ecuación:

$$\frac{sen2x.cosecx}{tgx} - cotgx.secx = 1$$

$$\frac{sen(2.30º).\frac{1}{sen30º}}{tg30º} - \frac{cos30º}{sen30º}.\frac{1}{cos30º} = 1$$

$$\frac{sen60º.\frac{1}{sen30º}}{tg30º} - \frac{\cancel{cos30º}}{sen30º}.\frac{1}{\cancel{cos30º}} = 1$$

$$\frac{\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{\frac{1}{2}}}{\frac{\sqrt{3}}{3}}}{} - \frac{1}{\frac{1}{2}} = 1$$

$$\frac{\frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}}\cdot\cancel{2}}{\frac{\sqrt{3}}{3}} - 2 = 1$$

$$\frac{3\cancel{\sqrt{3}}}{\cancel{\sqrt{3}}} - 2 = 1$$

$$3 - 2 = 1$$

Por tanto 30º y 150º son solución de la ecuación

Para t= -1, tenemos:

$$senx = \text{t}$$

$$senx = -1$$

$$x = arcsen(-1) = 270º$$

Comprobamos si son solución de la ecuación, para ello sustituimos el valor de x en la ecuación:

$$\frac{sen2x.cosecx}{tgx} - cotgx.secx = 1$$

$$\frac{2senx.cosx.cosecx}{tgx} - cotgx.secx = 1$$

$$\frac{2sen270º.cos270º.\frac{1}{sen270º}}{\frac{sen270º}{cos270º}} - \frac{cos270º}{sen270º}.\frac{1}{cos270º} = 1$$

$$\frac{2(-1).0.\frac{1}{-1}}{\frac{-1}{0}} - \frac{0}{-1}.\frac{1}{0} = 1$$

$$\frac{0}{\infty} - 0.\infty \neq 1$$

$$\mathbf{0}.\infty = \boldsymbol{Indeterminado}$$

Por tanto 270º no es solución de la ecuación