

## PROBLEMAS DE TRIGONOMETRÍA

Problema 20:

Resolver la ecuación:

$$\operatorname{sen}^2 x - 2\cos^2 x + \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2x = 0$$

Solución Problema 20:

$$\operatorname{sen}^2 x - 2\cos^2 x + \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2x = 0$$

Vamos a dejar la ecuación expresada en función del  $\operatorname{sen} x$

Para lo cual utilizaremos la fórmula fundamental:

$$\cos^2 x = 1 - \operatorname{sen}^2 x$$

Sustituimos su valor en la ecuación:

$$\operatorname{sen}^2 x - 2(1 - \operatorname{sen}^2 x) + \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2x = 0$$

$$\operatorname{sen}^2 x - 2 + 2\operatorname{sen}^2 x + \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2x = 0$$

$$3\operatorname{sen}^2 x + \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2x - 2 = 0$$

$$6\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen} 2x - 4 = 0$$

Ahora vamos a desarrollar la fórmula del  $\operatorname{sen} 2x$

$$6\operatorname{sen}^2 x + 2\operatorname{sen} x \cos x - 4 = 0$$

Volvemos a sustituir  $\cos x$  en función del  $\operatorname{sen} x$ :

$$6\operatorname{sen}^2 x + 2\operatorname{sen} x \cos x - 4 = 0$$

$$6\operatorname{sen}^2 x + 2\operatorname{sen} x \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 x} - 4 = 0 \text{ ecuación 1}$$

Hacemos el siguiente cambio de variable:

$$\operatorname{sen} x = t$$

PROBLEMAS DE TRIGONOMETRÍA: Problema 20

La ecuación 1 se puede expresar:

$$6t^2 + 2t\sqrt{1-t^2} - 4 = 0$$

$$2t\sqrt{1-t^2} = 4 - 6t^2 = 2(2 - 3t^2)$$

$$\cancel{2}t\sqrt{1-t^2} = \cancel{2}(2 - 3t^2)$$

$$t\sqrt{1-t^2} = (2 - 3t^2)$$

$$(t\sqrt{1-t^2})^2 = (2 - 3t^2)^2$$

$$t^2(1-t^2) = 4 + 9t^4 - 12t^2$$

$$t^2 - t^4 = 4 + 9t^4 - 12t^2$$

$$10t^4 - 13t^2 + 4 = 0 \text{ ecuación 2}$$

La ecuación 2 es una ecuación bicuadrada, hacemos el siguiente cambio de variable:

$$t^2 = y$$

$$t^4 = y^2$$

La ecuación 2 la podemos poner como:

$$10y^2 - 13y + 4 = 0$$

$$y = \frac{13 \pm \sqrt{196 - 190}}{20} = \frac{13 \pm \sqrt{9}}{20} = \frac{13 \pm 3}{20}$$

$$y_1 = \frac{13 + 3}{20} = \frac{16}{20} = \frac{4}{5}$$

$$y_2 = \frac{13 - 3}{20} = \frac{10}{20} = \frac{1}{2}$$

Ahora, deshacemos los sucesivos cambios de variables que hemos hecho:

Para  $y=4/5$ ,  $t$  será igual a:

$$t = \sqrt{\frac{4}{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

Una vez hallado el valor de  $t$ , podemos calcular el valor del arco:

$$\text{sen}x = t$$

$$\text{sen}x = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$$x = \arcsen \frac{2\sqrt{5}}{5} = \mathbf{116,565^\circ \textit{ aproximadamente}}$$

Para  $y=1/2$ ,  $t$  será igual a:

$$t = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Una vez hallado el valor de  $t$ , podemos calcular el valor del arco:

$$\text{sen}x = t$$

$$\text{sen}x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$x = \arcsen \frac{\sqrt{2}}{2} = \mathbf{45^\circ}$$