PROBLEMAS DE TRIGONOMETRÍA

Problema 17:

Simplificar la expresión

$$\frac{ctg\frac{a}{2} - tg\frac{a}{2}}{cosec2a + ctg2a}$$

Solución Problema 17:

$$\frac{ctg\frac{a}{2} - tg\frac{a}{2}}{cosec2a + ctg2a}$$

$$\frac{\frac{1}{tg\frac{a}{2}} - tg\frac{a}{2}}{cosec2a + ctg2a}$$

$$\frac{\frac{1 - tg^2\frac{a}{2}}{tg\frac{a}{2}}}{cosec2a + ctg2a} \quad expresión\ 1$$

Veamos la expresión

$$1 - tg^2\frac{a}{2}$$

cómo podemos transformarla en otra equivalente, para ello partimos de la fórmula del ángulo doble, solo que en este caso el ángulo doble es a, y el ángulo mitad es a/2:

$$tga = \frac{2tg\frac{a}{2}}{1 - tg^2\frac{a}{2}}$$

$$1 - tg^2\frac{a}{2} = \frac{2tg\frac{a}{2}}{tga}$$

Sustituimos su valor en la expresión 1:

$$\frac{\frac{1-tg^2\frac{a}{2}}{tg\frac{a}{2}}}{cosec2a+ctg2a}\ expresión\ 1$$

$$\frac{\frac{\frac{2tg\frac{a}{2}}{tga}}{tg\frac{a}{2}}}{cosec2a+ctg2a}=\frac{\frac{2tg\frac{a}{2}}{tgaxtg\frac{a}{2}}}{cosec2a+ctg2a}=\frac{\frac{2\cancel{tg\frac{a}{2}}}{tgax\cancel{tg\frac{a}{2}}}}{cosec2a+ctg2a}=$$

$$\frac{\frac{2}{tga}}{cosec2a+ctg2a}=\frac{\frac{2}{tga}}{\frac{1}{sen2a}+\frac{cos2a}{sen2a}}=\frac{\frac{2}{tga}}{\frac{1+cos2a}{sen2a}}expresión\ 2$$

Veamos la expresión

$1+cos2a$

cómo podemos transformarla en otra equivalente, para ello partimos de la fórmula del ángulo mitad, en esta caso “a”, y el ángulo doble “2a“, así:

$$cosa=\sqrt{\frac{1+cos2a}{2}}$$

$$cosa=\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{1+cos2a}$$

$$(cosa)^2\ =(\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{1+cos2a})^2$$

$$cos^2\mathrm{a}\ =\tfrac{2}{4}(\sqrt{1+cos2a})^2=\tfrac{1}{2}(1+cos2a)$$

Luego,

$$1+cos2a=2cos^2\mathrm{a}$$

Sustituimos su valor en la expresión 2

$$\frac{\frac{2}{tga}}{\frac{1+cos2a}{sen2a}} = \frac{\frac{2}{tga}}{\frac{2cos^2\mathrm{a}}{sen2a}} = \frac{\frac{2}{tga}}{\frac{2cos^2\mathrm{a}}{2senacosa}} = \frac{\frac{2}{\frac{sena}{cosa}}}{\frac{2cos^2\mathrm{a}}{2senacosa}} = \frac{\frac{2}{\frac{sena}{cosa}}}{\frac{\cancel{2}cos^{\cancel{2}}\mathrm{a}}{\cancel{2}sena\cancel{cosa}}} =$$

$$\frac{\frac{2cosa}{\mathrm{sena}}}{\frac{cosa}{sena}} = \frac{2cosasena}{cosasena} = \mathbf{2}$$