PROGRESIONES GEOMÉTRICAS

Problema 6:

Hallar la suma de los cuatro primeros términos de una progresión geométrica, cuyo primer término es $\sqrt{11+6\sqrt{2}}$, y la razón, $3-\sqrt{2}$

Solución Problema 6:

Para resolver este problema, primero hemos de transformar el radical $\sqrt{11+6\sqrt{2}}$ en la suma de dos radicales cuadráticos, para ello aplicamos la fórmula de transformación:

$$\sqrt{A+\sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A+\sqrt{A^2-B}}{2}} + \sqrt{\frac{A-\sqrt{A^2-B}}{2}}$$

Luego:

$$\sqrt{11+6\sqrt{2}} = \sqrt{11+\sqrt{36x2}} = \sqrt{11+\sqrt{72}}$$

A= 11

B=72

$$\sqrt{11+\sqrt{72}} = \sqrt{\frac{11+\sqrt{11^2-72}}{2}} + \sqrt{\frac{11-\sqrt{11^2-72}}{2}}$$

$$= \sqrt{\frac{11+\sqrt{121-72}}{2}} + \sqrt{\frac{11-\sqrt{121-72}}{2}}$$

$$= \sqrt{\frac{11+\sqrt{49}}{2}} + \sqrt{\frac{11-\sqrt{49}}{2}} = \sqrt{\frac{11+7}{2}} + \sqrt{\frac{11-7}{2}}$$

$$\sqrt{\frac{18}{2}} + \sqrt{\frac{4}{2}} = \sqrt{9} + \sqrt{2} = 3 + \sqrt{2} \ (*\ ver\ nota\ final\ problema)$$

Luego

$$\sqrt{11 + 6\sqrt{2}} = 3 + \sqrt{2}$$

Por tanto el primer término es:

$$a_1 = 3 + \sqrt{2}$$

Mediante la fórmula de cálculo del último término tenemos:

$$a_n = \ a_1 r^{n-1}$$

$$a_n = (3 + \sqrt{2})(3 - \sqrt{2})^3 = \left(3 + \sqrt{2}\right)\left(3 - \sqrt{2}\right)\left(3 - \sqrt{2}\right)^2 =$$

$$(9 - 2)(3 - \sqrt{2})^2 = 7\left(3 - \sqrt{2}\right)^2 = \ 7\left(9 + 2 - 6\sqrt{2}\right) = \ 77 - 42\sqrt{2}$$

$$\boldsymbol{a_n = \ 77 - 42\sqrt{2}}$$

Mediante la fórmula de la suma tenemos:

$$S_n = \ \frac{a_n \mathrm{r} - a_1}{r - 1}$$

$$S_4 = \ \frac{\left(77 - 42\sqrt{2}\right)(3 - \sqrt{2}) - (3 + \sqrt{2})}{(3 - \sqrt{2)} - 1} =$$

$$= \ \frac{\left(77 - 42\sqrt{2}\right)(3 - \sqrt{2}) - (3 + \sqrt{2})}{2 - \sqrt{2}} =$$

$$\frac{231 - 126\sqrt{2} - 77\sqrt{2} + 84 - 3 - \sqrt{2}}{2 - \sqrt{2}} = \frac{\left(312 - 204\sqrt{2}\right)(2 + \sqrt{2})}{\left(2 - \sqrt{2}\right)(2 + \sqrt{2})} \ =$$

$$\frac{624 - 408\sqrt{2} + 312\sqrt{2} - 408}{4 - 2} \ = \frac{216 - 96\sqrt{2}}{2} = 108 - 48\sqrt{2}$$

$$\boldsymbol{S_4 = \ 108 - 48\sqrt{2}}$$

Nota de fin de problema:

La transformación del radical $\sqrt{11+6\sqrt{2}}$ en la suma de dos radicales cuadráticos, puede hacerse de esta otra manera:

$$\sqrt{11+6\sqrt{2}} = \sqrt{11+\sqrt{36x2}} = \sqrt{11+\sqrt{72}} = \sqrt{x}+\sqrt{y}$$

$$\sqrt{11+\sqrt{72}} = \sqrt{x}+\sqrt{y}$$

$$(\sqrt{11+\sqrt{72}})^2 = (\sqrt{x}+\sqrt{y})^2$$

$$11+\sqrt{72} = x+y+\sqrt{4xy}$$

Por lo tanto:

$$x+y=11 \quad ecuación\ 1$$

$$4xy=72$$

$$xy=18 \quad ecuación\ 2$$

Despejando x en la 1ª ecuación y sustituyendo su valor en función de y en la ecuación 2 tenemos:

$$x=11-y$$

$$(11-y\ )y=18$$

Operando sobre esta ecuación tenemos:

$$y^2-11y+18=0$$

$$\mathrm{y} = \frac{11 \pm \sqrt{11^2-4\mathrm{x}1\mathrm{x}18}}{2} = \frac{11 \pm \sqrt{121-72}}{2} = \frac{11 \pm \sqrt{49}}{2}$$

$$\boldsymbol{y_1} = \frac{11+7}{2} = \frac{18}{2} = \mathbf{9}$$

$$\boldsymbol{y_2} = \frac{11-7}{2} = \frac{4}{2} = \mathbf{2}$$

Luego:

$$\sqrt{\mathbf{11}+\mathbf{6}\sqrt{\mathbf{2}}}=\sqrt{11+\sqrt{36x2}}=\sqrt{11+\sqrt{72}}\ =\mathbf{3}+\sqrt{\mathbf{2}}$$