PROGRESIONES GEOMÉTRICAS

Problema 29:

En una progresión geométrica la suma de sus infinitos términos es 64 veces la suma de los 6 primeros. ¿Cuál es la razón?

Solución Problema 29:

Sabemos que la fórmula de la suma de una progresión geométrica de infinitos términos es:

$$S_n = \frac{a_1}{1-r}$$

Sabemos que la fórmula de la suma de una progresión geométrica de términos finitos es:

$$S_n = \frac{a_n \,.\, r - a_1}{r-1}$$

En este caso

$$S_6 = \frac{a_6 \,.\, r - a_1}{r-1}$$

Sabemos que el último término de una progresión geométrica es:

$$a_n = a_1 \,.\, \mathrm{r}^{n-1}$$

En este caso:

$$a_6 = a_1 \,.\, \mathrm{r}^{6-1}$$

$$a_6 = a_1 \,.\, \mathrm{r}^{5}$$

Luego, según el enunciado:

$$\frac{a_1}{1-r} = \frac{64(a_n \,.\, r - a_1)}{r-1}$$

Sustituimos a_n por su valor en función de a_1

$$\frac{a_1}{1-r} = \frac{64[(a_1\,\mathrm{r}^{n-1}).\, r - a_1]}{r-1}$$

$$\frac{a_1}{1-r} = \frac{64[(a_1\,\mathrm{r}^5).r - a_1]}{r-1}$$

$$\frac{a_1}{1-r} = \frac{64(a_1\,\mathrm{r}^6 - a_1]}{r-1}$$

Sacamos a_1 factor común:

$$\frac{a_1}{1-r} = \frac{64a_1\,(\mathrm{r}^6 - 1)}{r-1}$$

Simplificamos a_1 en los dos términos de la igualdad:

$$\frac{1}{1-r} = \frac{64(\mathrm{r}^6 - 1)}{r-1}$$

Pero sabemos que: (1-r)= -(r-1)

Por tanto:

$$\frac{1}{-(r-1)} = \frac{64(\mathrm{r}^6 - 1)}{r-1}$$

Simplificamos (r-1) en ambos miembros de la igualdad

$$-1 = 64(\mathrm{r}^6 - 1)$$

$$\mathrm{r}^6 - 1 = \frac{-1}{64}$$

$$\mathrm{r}^6 = \frac{-1}{64} + 1 = \frac{-1+64}{64} = \frac{63}{64}$$

$$\mathrm{r}^6 = \frac{63}{64}$$

$$r = \sqrt[6]{\frac{63}{64}} = \sqrt[6]{\frac{63}{2^6}} = \frac{\sqrt[6]{63}}{2}$$

$$\boldsymbol{r} = \frac{\sqrt[6]{\mathbf{63}}}{\mathbf{2}}$$