

PROGRESIONES GEOMÉTRICAS

Problema 24:

La suma de tres números en progresión geométrica es 70. Si el primero se multiplica por 4, el segundo por 5 y el tercero por 4, los números resultantes están en progresión aritmética. Hallar los tres números.

Solución Problema 24:

Sea a_1 , a_2 y a_3 los tres números de la progresión geométrica, luego:

$$a_1 = a_1$$

$$a_2 = a_1 \cdot r$$

$$a_3 = a_1 \cdot r^2$$

Sea b_1 , b_2 y b_3 los tres números de la progresión aritmética, luego:

$$b_1 = b_1$$

$$b_2 = b_1 + d \text{ ecuación 1}$$

$$b_3 = b_1 + 2d \text{ ecuación 2}$$

Están relacionados de la siguiente manera:

El primero se multiplica por 4, el segundo por 5 y el tercero por 4

$$b_1 = 4a_1$$

$$b_2 = 5a_2 = 5(a_1 \cdot r) \text{ ecuación 3}$$

$$b_3 = 4a_3 = 4(a_1 \cdot r^2) \text{ ecuación 4}$$

Como sabemos que

$$b_1 = 4a_1$$

Sustituimos el valor de b_1 en las ecuaciones 1 y 2:

$$b_2 = b_1 + d = 4a_1 + d \text{ ecuación 5}$$

$$b_3 = b_1 + 2d = 4a_1 + 2d \text{ ecuación 6}$$

Igualemos las ecuaciones 3 y 5:

$$b_2 = 5a_2 = 5(a_1 \cdot r) \quad \text{ecuación 3}$$

$$b_2 = b_1 + d = 4a_1 + d \quad \text{ecuación 5}$$

Resultando

$$5(a_1 \cdot r) = 4a_1 + d \quad \text{ecuación 7}$$

Igualemos las ecuaciones 4 y 6:

$$b_3 = 4a_3 = 4(a_1 \cdot r^2) \quad \text{ecuación 4}$$

$$b_3 = b_1 + 2d = 4a_1 + 2d \quad \text{ecuación 6}$$

Resultando

$$4(a_1 \cdot r^2) = 4a_1 + 2d \quad \text{ecuación 8}$$

A continuación despejamos d en las ecuaciones 7 y 8:

Resultando

$$d = 5a_1 \cdot r - 4a_1 \quad \text{ecuación 9}$$

$$d = \frac{4a_1 \cdot r^2 - 4a_1}{2} \quad \text{ecuación 10}$$

Igualemos en d las ecuaciones 9 y 10:

$$5a_1 \cdot r - 4a_1 = \frac{4a_1 \cdot r^2 - 4a_1}{2} = 2a_1 \cdot r^2 - 2a_1$$

Operando,

$$5a_1 \cdot r - 4a_1 = 2a_1 \cdot r^2 - 2a_1$$

Sacamos factor común a_1 en los dos miembros de la igualdad

$$a_1 (5r - 4) = a_1 (2r^2 - 2)$$

Simplificamos a_1 en los dos miembros de la igualdad

$$5r - 4 = 2r^2 - 2$$

$$2r^2 - 5r - 2 + 4 = 0$$

$$2r^2 - 5r + 2 = 0$$

$$r = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{4} = \frac{5 \pm \sqrt{9}}{4} = \frac{5 \pm 3}{4}$$

$$r_1 = \frac{5 + 3}{4} = \frac{8}{4} = 2 \quad \text{solución válida}$$

$$r_2 = \frac{5 - 3}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \quad \text{solución válida}$$

Para $r_1 = 2$

A continuación aplicamos la fórmula de suma geométrica de un número de términos finitos

$$S_n = \frac{a_n \cdot r - a_1}{r - 1}$$

En este caso

$$70 = \frac{a_3 \cdot r - a_1}{r - 1}$$

Sustituimos el valor a_3 en función de a_1

$$70 = \frac{a_1 \cdot r^2 \cdot r - a_1}{r - 1}$$

$$70 = \frac{a_1 \cdot r^3 - a_1}{r - 1} = \frac{a_1 \cdot 2^3 - a_1}{2 - 1} = 8a_1 - a_1 = 7a_1$$

$$7a_1 = 70$$

$$a_1 = \frac{70}{7} = 10$$

Luego los números son:

$$a_1 = a_1 = 10$$

$$a_2 = a_1 \cdot r = 10 \cdot 2 = 20$$

$$a_3 = a_1 \cdot r^2 = 10 \cdot 2^2 = 10 \cdot 4 = 40$$

PROGRESIONES GEOMÉTRICAS: Problema 24

Para $r_2 = 1/2$

A continuación aplicamos la fórmula de suma geométrica de un número de términos finitos

$$S_n = \frac{a_n \cdot r - a_1}{r - 1}$$

En este caso

$$70 = \frac{a_3 \cdot r - a_1}{r - 1}$$

Sustituimos el valor a_3 en función de a_1

$$70 = \frac{a_1 \cdot r^2 \cdot r - a_1}{r - 1}$$

$$70 = \frac{a_1 \cdot r^3 - a_1}{r - 1} = \frac{a_1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 - a_1}{\frac{1}{2} - 1} = \frac{\frac{a_1}{8} - a_1}{\frac{1 - 2}{2}} = \frac{\frac{a_1 - 8a_1}{8}}{\frac{-1}{2}} =$$

$$\frac{\frac{-7a_1}{8}}{\frac{-1}{2}} = \frac{7a_1}{8} = \frac{2 \cdot 7a_1}{8} = \frac{14a_1}{8}$$

$$70 = \frac{14a_1}{8}$$

$$14a_1 = 560$$

$$a_1 = \frac{560}{14} = 40$$

Luego los números son:

$$a_1 = a_1 = \mathbf{40}$$

$$a_2 = a_1 \cdot r = 40 \cdot \frac{1}{2} = \mathbf{20}$$

$$a_3 = a_1 \cdot r^2 = 40 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 10 \cdot \frac{1}{4} = \mathbf{10}$$