PROGRESIONES GEOMÉTRICAS

Problema 23:

Resolver la ecuación x^4-mx^2+n= 0, siendo m la suma en el límite de los términos de la progresión

$$\div\div\, 4 : 2 : \ldots \ldots \ldots \ldots$$

Y n el quinto término del desarrollo de

$$(\sqrt{3} - 2\sqrt[4]{45^{-1}})^6$$

Solución Problema 23:

En la ecuación

$$x^4 - mx^2 + n = 0 \quad ecuación\ 1$$

El 1er paso es calcular “m” mediante la fórmula de la suma de los términos de una progresión geométrica indefinida:

$$S = \frac{a_1}{1 - \mathrm{r}}$$

$$\boldsymbol{S} = \frac{2}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{2}{\frac{2 - 1}{2}} = \frac{2}{\frac{1}{2}} = \mathbf{8}$$

Por tanto, la ecuación 1, m = 8. Así, la podemos poner como:

$$x^4 - 8x^2 + n \quad = 0 \ \ ecuación\ 2$$

2º paso: calcular n, que es el quinto término del desarrollo

$$(\sqrt{3} - 2\sqrt[4]{45^{-1}})^6$$

En estos desarrollos que hay tener en cuenta que:

El exponente del 1er término es igual al numerador “n” menos el número de orden

El exponente del 2º término es igual al número de orden

Y sabiendo que:

$$\binom{m}{n} = \frac{\text{m!}}{n!\,(m-n)!}$$

El quinto término del desarrollo es:

$$\boldsymbol{n} = (\sqrt{3} - 2\sqrt[4]{45^{-1}})^6 = \binom{6}{4}\left(\sqrt{3}\right)^2(-2\sqrt[4]{45^{-1}})^4 = \frac{6!}{4!\,(6-4)!}\left(\sqrt{3}\right)^2(-2\sqrt[4]{45^{-1}})^4$$

$$= \frac{6!}{4!\,2!}\ 3x2^4x\frac{1}{45} = 3x5x3x\frac{2^4}{45} = 2^4 = \mathbf{16}$$

Por tanto la ecuación 2 la podemos como:

$$x^4 - 8x^2 + n \quad = 0 \ \ ecuación\ 2$$

$$x^4 - 8x^2 + 16 \quad = 0 \ \ ecuación\ 3$$

A continuación resolvemos la ecuación 3, ecuación bicuadrada, haciendo un cambio de variable:

$$x^2 = t$$

$$x^4 = t^2$$

La ecuación 3 queda:

$$t^2 - 8\text{t} + 16 \quad = 0 \ \ ecuación\ 4$$

$$t = \frac{8 \pm \sqrt{64-64}}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

Para t= 4,

$$x^2 = 4$$

$$\boldsymbol{x} = \sqrt{64} = \ \boldsymbol{\pm 2} \quad \boldsymbol{es\ la\ soluci\text{ó}n\ de\ la\ ecuaci\text{ó}n\ planteada}$$