

PROGRESIONES GEOMÉTRICAS

Problema 21:

Dividir 3900 en cuatro partes que estén en progresión geométrica de manera que la diferencia entre los términos medios esté, con la diferencia de los extremos, en relación 5/31.

Solución Problema 21:

Sea a_1 , a_2 , a_3 y a_4 las cuatro partes en que se divide el número 3900, y que están en progresión geométrica.

Expresando los cuatro términos en función de a_1 :

$$a_1 = a_1$$

$$a_2 = a_1 \cdot r$$

$$a_3 = a_1 \cdot r^2$$

$$a_4 = a_1 \cdot r^3$$

El enunciado nos dice que la diferencia entre los términos medios está, con la diferencia de los extremos, en relación 5/31, es decir

$$\frac{a_3 - a_2}{a_4 - a_1} = \frac{5}{31}$$

Expresando los cuatro términos en función de a_1 , podemos hallar la razón:

$$\frac{a_1 \cdot r^2 - a_1 \cdot r}{a_1 \cdot r^3 - a_1} = \frac{5}{31}$$

Sacando factor común en el numerador $a_1 \cdot r$; y el denominador a_1 , tenemos:

$$\frac{\cancel{a_1} \cdot r(r - 1)}{\cancel{a_1}(r^3 - 1)} = \frac{5}{31}$$

$$31r(r - 1) = 5(r^3 - 1)$$

$$31(r^2 - r) = 5r^3 - 5$$

$$31r^2 - 31r = 5r^3 - 5$$

$$5r^3 - 31r^2 + 31r - 5 = 0 \text{ ecuación 1}$$

Aplicando la regla de Ruffini:

$$\begin{array}{r} 5 \quad -31 \quad +31 \quad -5 \\ \underline{1 \quad \quad \quad 5 \quad -26 \quad 5} \\ 5 \quad -26 \quad 5 \end{array}$$

La solución $x=1$, no es válida, ya que anula la ecuación 1.

Por tanto, resolvemos la ecuación de 2º grado que resulta:

$$5r^2 - 26r + 5 = 0$$

$$r = \frac{26 \pm \sqrt{676 - 100}}{10} = \frac{26 \pm \sqrt{576}}{10} = \frac{26 \pm 24}{10} =$$

$$r_1 = \frac{26 + 24}{10} = \frac{50}{10} = \mathbf{5 \text{ solución válida}}$$

$$r_2 = \frac{26 - 24}{10} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5} \mathbf{\text{ solución no válida}}$$

Ahora calculamos el término a_1 , partiendo de la fórmula de la suma de las progresiones geométricas limitadas:

$$S_n = \frac{a_n \cdot r - a_1}{r - 1}$$

$$3900 = \frac{a_4 \cdot r - a_1}{r - 1} = \frac{a_1 \cdot r^3 \cdot r - a_1}{r - 1} = \frac{a_1 \cdot r^4 - a_1}{r - 1}$$

$$3900 = \frac{a_1 \cdot r^4 - a_1}{r - 1}$$

$$3900 = \frac{a_1 \cdot 5^4 - a_1}{5 - 1} = \frac{625a_1 - a_1}{4} = \frac{624a_1}{4} = 156a_1$$

$$3900 = 156a_1$$

$$a_1 = \frac{3900}{156} = \mathbf{25}$$

Por tanto, los 4 términos buscados son:

$$a_1 = a_1 = \mathbf{25}$$

$$a_2 = a_1 \times r = 25 \times 5 = \mathbf{125}$$

$$a_3 = a_1 \times r^2 = 25 \times 5^2 = 25 \times 25 = \mathbf{625}$$

$$a_4 = a_1 \times r^3 = 25 \times 5^3 = 25 \times 125 = \mathbf{3125}$$