PROGRESIONES GEOMÉTRICAS

Problema 20:

Resolver el sistema

$2x + y + z = 40$

$3y - z = 10$

Sabiendo que x, y, z son tres términos consecutivos de una progresión geométrica.

Solución Problema 20:

Como sabemos que x, y, z están en progresión geométrica podemos poner:

$\div x : y : z$

Poniendo y, z en función de x tenemos:

$\div x : xr : xr^2 \; progresión \; 1$

Por otra parte, tenemos las ecuaciones:

$2x + y + z = 40 \;\; \text{ecuación } 1$

$3y - z = 10 \;\; \text{ecuación } 2$

Sumando las ecuaciones 1 y 2 tenemos:

$2x + 4y = 50$

Simplificando por 2:

$x + 2y = 25 \;\; \text{ecuación } 3$

Poniendo y en función de x en la ecuación 3:

$x + 2xr = 25 \;\; \text{ecuación } 4$

Sacando x factor común en el primer miembro de la ecuación 4

$x(1+2r) = 25$ ecuación 4

$$x = \frac{25}{1+2r}$$

Ahora la progresión 1 la podemos poner como:

$$\div\div\, x : xr : xr^2 \quad progresión\ 1$$

$$\div\div\, \frac{25}{1+2r} : \frac{25}{1+2r}r : \frac{25}{1+2r}r^2 \quad progresión\ 2$$

Ahora sustituimos el valor de y, z de la progresión 2, en la ecuación 2

$3y - z = 10$ ecuación 2

$$3\left(\frac{25}{1+2r}\right)r - \left(\frac{25}{1+2r}\right)r^2 = 10$$

Operando en esta ecuación

$$\frac{75r}{1+2r} - \frac{25r^2}{1+2r} = 10$$

En el 1er miembro de la ecuación los denominadores son iguales, luego:

$$\frac{75r - 25r^2}{1+2r} = 10$$

$$75r - 25r^2 = 10\,(1+2r)$$

$$75r - 25r^2 = 10 + 20r$$

$$25r^2 - 55r + 10 = 0$$

Simplificando por 5

$$5r^2 - 11r + 2 = 0$$

$$\mathrm{r} = \frac{11 \pm \sqrt{121-40}}{10} = \frac{11 \pm \sqrt{81}}{10} = \frac{11 \pm 9}{10} =$$

$$\boldsymbol{r_1} = \frac{11+9}{10} = \frac{20}{10} = \mathbf{2\ \ soluci}\text{ó}\mathbf{n\ v}\text{á}\mathbf{lida}$$

$$\boldsymbol{r_2} = \frac{11-5}{10} = \frac{2}{10} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{5}}\ \boldsymbol{soluci}\text{ó}\boldsymbol{n\ no\ v}\text{á}\boldsymbol{lida}$$

Para r=2

$$\boldsymbol{x} = \frac{25}{1+2r} = \frac{25}{1+4} = \mathbf{5}$$

$$\boldsymbol{y} = \left(\frac{25}{1+2r}\right)r = \left(\frac{25}{1+4}\right)2\ = \mathbf{10}$$

$$\boldsymbol{z} = (\frac{25}{1+2r})\mathrm{r}^2\ = \frac{25}{1+4}4 = \mathbf{20}$$