PROGRESIONES GEOMÉTRICAS

Problema 19:

La suma de los términos que ocupan el lugar impar, en una progresión geométrica de seis términos, es 1365, y la suma de los que ocupan el lugar par, 5460. Hallar el primer término y la razón.

Solución Problema 19:

Sea a_1, a_3 y a_5 los tres términos impares de la progresión geométrica.

Expresando los tres términos en función de a_1:

$$a_1 = a_1$$

$$a_3 = a_1 \, \mathrm{xr}^2$$

$$a_5 = a_1 \, \mathrm{xr}^4$$

Sea a_2, a_4 y a_6 los tres términos pares de la progresión geométrica.

Expresando los tres términos en función de a_1:

$$a_2 = a_1 \, \mathrm{xr}$$

$$a_4 = a_1 \, \mathrm{xr}^3$$

$$a_5 = a_1 \, \mathrm{xr}^5$$

Sabemos las sumas de los tres términos impares y las sumas de los tres términos pares, luego:

Suma términos impares:

$$S_{2n-1} = a_1 + a_3 + a_5 = 1365$$

$$1365 = a_1 + a_1 \, \mathrm{xr}^2 + a_1 \, \mathrm{xr}^4 = a_1 \, (1 + \mathrm{r}^2 + \mathrm{r}^4) \text{ ecuación 1}$$

Suma términos pares:

$$S_{2n} = a_2 + a_4 + a_6 = 5460$$

$$5460 = a_1 \text{ xr} + a_1 \text{ xr}^3 + a_1 \text{ xr}^5 = a_1 (\text{r} + \text{r}^3 + \text{r}^5)$$

Podemos calcular la razón "r":

Para ello, dividimos ambas sumas para eliminar a_1:

$$\frac{1365}{5460} = \frac{a_1 (1 + \text{r}^2 + \text{r}^4)}{a_1 (\text{r} + \text{r}^3 + \text{r}^5)} = \frac{(1 + \text{r}^2 + \text{r}^4)}{(\text{r} + \text{r}^3 + \text{r}^5)}$$

$$\frac{1365}{5460} = \frac{1365}{1365x4} = \frac{(1 + \text{r}^2 + \text{r}^4)}{(\text{r} + \text{r}^3 + \text{r}^5)}$$

$$\frac{1}{4} = \frac{(1 + \text{r}^2 + \text{r}^4)}{(\text{r} + \text{r}^3 + \text{r}^5)}$$

$$\text{r} + \text{r}^3 + \text{r}^5 = 4\text{x}(1 + \text{r}^2 + \text{r}^4) = 4 + 4\text{r}^2 + 4\text{r}^4$$

Ordenando en función del mayor exponente de "r" tenemos:

$$\text{r}^5 - 4\text{r}^4 + \text{r}^3 - 4\text{r}^2 + \text{r} - 4 = 0$$

A continuación resolvemos la ecuación aplicando la regla de Ruffini:

$$\begin{array}{c|cccccc} & 1 & -4 & 1 & -4 & 1 & -4 \\ 4 & & 4 & 0 & 4 & 0 & 4 \\ \hline & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

La solución válida para la razón de la progresión geométrica es 4, (el resto de soluciones no pertenecen al conjunto de los números reales) luego:

$$\boldsymbol{r = 4}$$

De la ecuación 1 obtenemos el valor de a_1:

$S_{2n-1} = a_1 + a_1 \, \mathrm{xr}^2 + a_1 \, \mathrm{xr}^4 = a_1 \, (1 + \mathrm{r}^2 + \mathrm{r}^4) = 1365$ ecuación 1

$1365 = a_1 \, (1 + \mathrm{r}^2 + \mathrm{r}^4)$

$$\boldsymbol{a_1} = \frac{1365}{(1 + \mathrm{r}^2 + \mathrm{r}^4)} = \frac{1365}{(1 + 16 + 256)} = \frac{1365}{273} = \mathbf{5}$$