PROGRESIONES GEOMÉTRICAS

Problema 18:

$$\frac{\cdot\cdot}{\cdot\cdot}\frac{9}{16}:2\frac{1}{4}:\ldots$$

Hallar dos términos consecutivos de la progresión anterior, cuyas raíces cuadradas se diferencian en 48.

Solución Problema 18:

La razón de la progresión anterior es:

$$\mathbf{r} = \frac{a_2}{a_1} = \frac{\frac{9}{4}}{\frac{9}{16}} = \mathbf{4}$$

Sean a_x y a_{x-1} los términos pedidos.

Sabemos que:

$$a_x = a_{x-1}\mathrm{xr}$$

Como el enunciado nos dice:

$$\sqrt{a_x} - \sqrt{a_{x-1}} = 48$$

$$\sqrt{a_{x-1}\,\mathrm{xr}} - \sqrt{a_{x-1}} = 48$$

$$\sqrt{a_{x-1}\,\mathrm{xr}} = 48 + \sqrt{a_{x-1}}$$

Elevando al cuadrado ambos términos de la ecuación,

$$\sqrt{a_{x-1}\,\mathrm{x}4}^{\;2} = (48 + \sqrt{a_{x-1}}\,)^2$$

$$a_{x-1}\,\mathrm{x}4 = 2304 + a_{x-1} + 96\sqrt{a_{x-1}}$$

$$4a_{x-1} = 2304 + a_{x-1} + 96\sqrt{a_{x-1}}$$

$$3a_{x-1} = 2304 + 96\sqrt{a_{x-1}}$$

$$a_{x-1} = 768 + 32\sqrt{a_{x-1}}$$

$$a_{x-1} - 768 = 32\sqrt{a_{x-1}}$$

Elevando nuevamente al cuadrado ambos términos de la ecuación,

$$(a_{x-1} - 768)^2 = (32\sqrt{a_{x-1}})^2$$

$$a_{x-1}{}^2 + 589824 - 1536\, a_{x-1} = 1024 a_{x-1}$$

$$a_{x-1}{}^2 - 2560\, a_{x-1} + 589824 = 0$$

$$a_{x-1} = \frac{2560 \pm \sqrt{6553600 - 2359296}}{2} = \frac{2560 \pm \sqrt{4194304}}{2}$$

$$= \frac{2560 \pm 2048}{2}$$

$$a_{x-11} = \frac{2560 + 2048}{2} = \frac{4608}{2} = \mathbf{2304} \quad \textbf{solución válida}$$

$$a_{x-12} = \frac{2560 - 2048}{2} = \frac{512}{2} = \mathbf{256} \quad \textbf{solución no válida}$$

Luego si

$$\boldsymbol{a_{x-1}} = \mathbf{2304}$$

$$\boldsymbol{a_x} = 2304 \text{ x}4 = \mathbf{9216}$$