PROGRESIONES GEOMÉTRICAS

Problema 13:

Resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$(1+3+5+7+\cdots+31)x+(2+4+6+\cdots+30)y=208$$

$$(2+4+8+16\ldots+1024)x-\left(\sqrt{4\sqrt{1296}}\right)^3 y=447$$

Solución Problema 13:

El primer paso en las dos ecuaciones es obtener los términos "x" e "y", así:

$$(1+3+5+7+\cdots+31)x+(2+4+6+\cdots+30)y=208\ ecuación\ 1$$

El término "x" de la ecuación 1 es una progresión aritmética, y calculamos su suma, para ello primero hallamos la diferencia:

$$\boldsymbol{d}=a_2-\ a_1=3-1=\mathbf{2}$$

A continuación calculamos el número de términos:

$$a_n=a_1+(n-1)\mathrm{d}$$

$$\mathbf{n}=\frac{a_n-a_1}{\mathrm{d}}+1=\frac{31-1}{2}+1=\mathbf{16}$$

A continuación calculamos su suma:

$$S_n=\frac{a_1+a_n}{2}.n$$

$$S_{16}=\frac{1+31}{2}.16=256$$

Luego el término x es: **256x**

El término "y" de la ecuación 1 es una progresión aritmética, y calculamos su suma, para ello primero hallamos la diferencia:

$$\boldsymbol{d} = a_2 - a_1 = 4 - 2 = \mathbf{2}$$

A continuación calculamos el número de términos:

$$a_n = a_1 + (n-1)\mathrm{d}$$

$$\mathbf{n} = \frac{30-2}{2} + 1 = \frac{30-2}{2} + 1 = \mathbf{15}$$

A continuación calculamos su suma:

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2}.n$$

$$S_{15} = \frac{2+30}{2}.15 = 240$$

Luego el término y es: **240y**

Por tanto la ecuación 1 queda:

$$(1+3+5+7+\cdots+31)x + (2+4+6+\cdots+30)y = 208\ ecuación\ 1$$

$$256x + 240y = 208$$

$$16x + 15y = 13\quad ecuación\ 3$$

Hacemos lo mismo con la ecuación 2:

$$(2+4+8+16\ldots+1024)x - \left(\sqrt{4\sqrt{1296}}\right)^3 y = 447\ \ ecuación\ 2$$

El término "x" de la ecuación 2 es una progresión geométrica, y calculamos su suma, para ello primero hallamos la razón:

$$\boldsymbol{r} = \frac{a_2}{a_1}$$

$$\boldsymbol{r} = \frac{4}{2} = \mathbf{2}$$

A continuación calculamos su suma:

$$S_n = \frac{a_n \mathrm{xr} - a_1}{r-1}$$

$$S_n = \frac{1024\mathrm{x}2 + 2}{2-1} = 2046$$

Luego el término x es: **2046x**

El término "y" de la ecuación 2 es:

$$(\sqrt{4\sqrt{1296}})^3$$

Hacemos la descomposición en factores primos de 1296

$$1296 = 2x2x2x2x3x3x3x3x1 = 2^4x3^4x1$$

Luego,

$$(\sqrt{4\sqrt{1296}})^3 = (\sqrt{4\sqrt{2^4x3^4}})^3 = (\sqrt{4x2^2x3^2})^3 = (\sqrt{2^2x2^2x3^2})^3 =$$

$$(2x2x3)^3 = 1728y$$

Luego el término y es: **1728x**

Por tanto la ecuación 2 queda:

$$(2+4+8+16 \ldots + 1024)x - (\sqrt{4\sqrt{1296}})^3 y = 447$$

$$2046x - 1728y = 447 \; ecuación \; 4$$

Ahora tenemos el siguiente sistema de ecuaciones resultante de la ecuación 3 y 4:

$$16x + 15y = 13 \quad ecuación \; 3$$

$$2046x - 1728y = 447 \; ecuación \; 4$$

Despejamos "x" de la ecuación 3 y la sustituimos en la 4:

$$x = \frac{13 - 15\text{y}}{16}$$

$$2046(\frac{13 - 15\text{y}}{16}) - 1728y = 447$$

$$26598 - 30690y - 27648y = 7152$$

$$-58338y = -19446$$

$$\boldsymbol{y} = \frac{-19446}{-58338} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}$$

Sustituyendo el valor de y en

$$x = \frac{13 - 15\text{y}}{16}$$

Tenemos:

$$\boldsymbol{x} = \frac{13 - 15\frac{1}{3}}{16} = \frac{13 - 5}{16} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$$

Luego:

$$\boldsymbol{x} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$$

$$\boldsymbol{y} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}$$