

## PROGRESIONES GEOMÉTRICAS

### Problema 44:

La suma de tres términos en progresión geométrica es 14. Sabiendo que si se incrementan los dos primeros términos en una unidad y se disminuye en la misma cantidad el tercero, los números que resultan forman una progresión aritmética, establecer la progresión geométrica.

### Solución Problema 44:

Sean  $a_1$ ,  $a_2$  y  $a_3$  los números que están en progresión geométrica, siendo:  
 $a_1 < a_2 < a_3$

Sabemos que:

$$a_1 + a_2 + a_3 = 14 \text{ ecuación 1}$$

Poniéndolos en función de  $a_1$ :

$$a_1 = a_1$$

$$a_2 = a_1 \cdot r$$

$$a_3 = a_2 \cdot r = a_1 \cdot r^2$$

Poniendo la ecuación 1 en función de  $a_1$ :

$$a_1 + a_1 \cdot r + a_1 \cdot r^2 = 14 \text{ ecuación 2}$$

Si se incrementan los dos primeros términos en una unidad y se disminuye en la misma cantidad el tercero, los números que resultan forman una progresión aritmética, es decir:  $b_1 < b_2 < b_3$

$$b_1 = a_1 + 1$$

$$b_2 = a_2 + 1; b_2 = (a_1 \cdot r) + 1$$

$$b_3 = a_3 - 1; b_3 = a_1 \cdot r^2 - 1$$

Al estar en progresión aritmética significa que:

$$d = b_2 - b_1$$

$$d = b_3 - b_2$$

Igualando en d:

$$b_2 - b_1 = b_3 - b_2$$

$$(a_1 \cdot r) + 1 - (a_1 + 1) = (a_1 \cdot r^2 - 1) - [(a_1 \cdot r) + 1]$$

$$a_1 \cdot r + 1 - a_1 - 1 = a_1 \cdot r^2 - 1 - a_1 \cdot r - 1$$

$$a_1 \cdot r - a_1 = a_1 \cdot r^2 - a_1 \cdot r - 2$$

$$a_1 \cdot r^2 - 2a_1 \cdot r + a_1 = 2 \text{ ecuación 3}$$

De las ecuaciones 2 y 3, tenemos:

$$a_1 \cdot r^2 + a_1 \cdot r + a_1 = 14 \text{ ecuación 2}$$

$$a_1 \cdot r^2 - 2a_1 \cdot r + a_1 = 2 \text{ ecuación 3}$$

Multiplicando la 3 por -1:

$$-a_1 \cdot r^2 + 2a_1 \cdot r - a_1 = -2$$

Y restando miembro a miembro:

$$3a_1 \cdot r = 12$$

$$a_1 = \frac{12}{3r}$$

$$a_1 = \frac{4}{r}$$

Sustituimos el valor de  $a_1$  en la ecuación 3:

$$a_1 \cdot r^2 - 2a_1 \cdot r + a_1 = 2 \text{ ecuación 3}$$

$$\frac{4}{r} \cdot r^2 - 2 \frac{4}{r} \cdot r + \frac{4}{r} = 2$$

$$4r - 8 + \frac{4}{r} = 2$$

$$4r^2 - 8r + 4 = 2r$$

$$4r^2 - 10r + 4 = 0$$

$$2r^2 - 5r + 2 = 0$$

$$r = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{4} = \frac{5 \pm \sqrt{9}}{4} = \frac{5 \pm 3}{4}$$

$$r_1 = \frac{5 + 3}{4} = \frac{8}{4} = 2$$

$$r_2 = \frac{5 - 3}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

Por tanto,

$$a_1 = \frac{4}{r}$$

$$a_1 = \frac{4}{2} = 2$$

$$a_2 = a_1 \cdot r = 2 \cdot 2 = 4$$

$$a_3 = a_2 \cdot r = a_1 \cdot r^2 = 2 \cdot 4 = 8$$

Luego la progresión geométrica es:

**2; 4; 8**