PROGRESIONES GEOMÉTRICAS

Problema 43:

Tres números están enteros están en progresión geométrica; si el segundo aumenta en 8 sin variar los otros dos, se convierte en otra aritmética; y si en ésta el último término aumenta en 64, vuelve a ser geométrica. ¿Cuáles son esos números?

Solución Problema 43:

Sean a_1, a_2 y a_3 los números que están en progresión geométrica, siendo: $a_1<a_2<a_3$

Poniéndolos en función de a_1:

$a_1 = a_1$

$a_2 = a_1.r$

$a_3 = a_2.r = a_1.r^2$

Si el segundo aumenta en 8 sin variar los otros dos, se convierte en otra aritmética, es decir: $b_1<b_2<b_3$

$a_1 = b_1$

$a_1 + 8 = b_2;\ b_2 = (a_1.r) + 8$

$a_3 = b_3;\ \ b_3 = a_1.r^2$

Al estar en progresión aritmética significa que:

$d = b_2 - b_1$

$d = b_3 - b_2$

Igualando en d:

$b_2 - b_1 = b_3 - b_2$

$(a_1.r) + 8 - a_1 = a_1.r^2 - [(a_1.r) + 8]$

$(a_1.r) + 8 - a_1 = a_1.r^2 - (a_1.r) - 8$

$a_1.r^2 - 2a_1.r + a_1 - 16 = 0$

Despejando a_1,

$$a_1(r^2-2r+1)-16=0$$

$$a_1=\frac{16}{r^2-2r+1}\ ecuación\ 1$$

Si en ésta el último término aumenta en 64, vuelve a ser geométrica; es decir: $c_1 < c_2 < c_3$

$$b_1=c_1=a_1$$

$$b_2=c_2=\ (a_1.r)+8$$

$$b_3+64=\ c_3\ ; c_3=\ a_1.r^2+64$$

Al estar en progresión geométrica significa que:

$$r=\ \frac{c_2}{c_1}=\ \frac{(a_1.r)+8}{a_1}$$

$$r=\ \frac{c_3}{c_2}=\ \frac{a_1.r^2+64}{(a_1.r)+8}$$

Igualando en r:

$$\frac{(a_1.r)+8}{a_1}=\frac{a_1.r^2+64}{(a_1.r)+8}$$

$$(a_1.r+8)^2=a_1(a_1.r^2+64)$$

$$a_1{}^2.r^2+64+16a_1.r=a_1{}^2.r^2+64a_1$$

$$64+16a_1.r=64a_1$$

$$64a_1=\ 16a_1.r+64$$

$$4a_1=\ a_1.r+4$$

$$4a_1-a_1.r=\ 4$$

$$a_1(4-r)=\ 4$$

$$a_1=\frac{4}{(4-r)}\ ecuación\ 2$$

Igualando la ecuación 1 y la 2:

$$\frac{16}{r^2-2r+1} = \frac{4}{(4-r)}$$

$$16(4-r) = 4(r^2-2r+1)$$

$$4(4-r) = (r^2-2r+1)$$

$$16-4r = r^2-2r+1$$

$$0 = r^2-2r+4r+1-16$$

$$r^2+2r-15=0$$

$$r = \frac{-2 \pm \sqrt{4+60}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{64}}{2} = \frac{-2 \pm 8}{2}$$

$$\boldsymbol{r_1} = \frac{-2+8}{2} = \frac{6}{2} = \mathbf{3}$$

$$\boldsymbol{r_2} = \frac{-2-8}{2} = \frac{-10}{2} = -\mathbf{5}$$

Comprobamos para $r_1 = 3$

$$a_1 = \frac{4}{(4-r)}\ ecuación\ 2$$

$$a_1 = \frac{4}{4-3} = 4$$

Luego:

$$a_1 = b_1 = c_1 = 4$$

$$a_2 = a_1.r = 4.3 = 12$$

$$b_2 = c_2 = (a_1.r) + 8 = 12 + 8 = 20$$

$$a_3 = a_1.r^2 = 4.9 = 36$$

$$a_3 = b_3 = 36$$

$$c_3 = b_3 + 64 = 36 + 64 = 100$$

Los números son:

$$\boldsymbol{a_1} = \mathbf{4}$$

$\boldsymbol{a_2 = 12}$

$\boldsymbol{a_3 = 36}$

Comprobamos que a_1, a_2 y a_3 están en progresión geométrica:

$$r = \frac{12}{4} = \frac{36}{12}$$

Comprobamos que b_1, b_2 y b_3 están en progresión aritmética:

$b_1 = 4$

$b_2 = 20$

$b_3 = 36$

$d = b_2 - b_1 = 20 - 4 = 16$

$d = b_3 - b_2 = 36 - 20 = 16$

Comprobamos que c_1, c_2 y c_3 están en progresión geométrica:

$c_1 = 4$

$c_2 = 20$

$c_3 = 100$

$$r = \frac{20}{4} = \frac{100}{20}$$

De igual modo se comprueba para r=-5