

PROGRESIONES GEOMÉTRICAS

Problema 42:

Tres números forman una progresión aritmética cuya razón es 4. Si el primer término se le incrementa en 2, al segundo en 3 y al tercero en 5, los números resultantes forman una progresión geométrica. ¿Hallar los tres números?

Solución Problema 42:

Sean a_1 , a_2 y a_3 los números que están en progresión aritmética, siendo:

$$a_1 < a_2 < a_3$$

Poniéndolos en función de a_1 :

$$a_1 = a_1$$

$$a_2 = a_1 + 4$$

$$a_3 = a_2 + 4 = a_1 + 8$$

Si el primer término se le incrementa en 2, al segundo en 3 y al tercero en 5, los números resultantes forman una progresión geométrica

$$a_1 + 2 = b_1$$

$$a_2 + 3 = b_2$$

$$a_3 + 5 = b_3$$

De manera que: $b_1 < b_2 < b_3$

Poniéndolos en función de a_1 ,

$$a_1 + 2 < (a_1 + 4) + 3 < (a_1 + 8) + 5$$

$$a_1 + 2 < a_1 + 7 < a_1 + 13 \text{ (expresión 1)}$$

Como están en progresión geométrica, quiere decir que:

$$r = \frac{b_2}{b_1}$$

$$r = \frac{b_3}{b_2}$$

Luego de la expresión 1:

$$r = \frac{a_1 + 7}{a_1 + 2}$$

$$r = \frac{a_1 + 13}{a_1 + 7}$$

Igualando en r:

$$\frac{a_1 + 7}{a_1 + 2} = \frac{a_1 + 13}{a_1 + 7}$$

Resolviendo la igualdad anterior:

$$(a_1 + 7)^2 = (a_1 + 2)(a_1 + 13)$$

$$a_1^2 + 49 + 14a_1 = a_1^2 + 2a_1 + 13a_1 + 26$$

$$49 - 26 = 15a_1 - 14a_1$$

$$a_1 = 23$$

$$a_2 = 23 + 4 = 27$$

$$a_3 = 27 + 4 = 31$$

Ahora hallamos b_1, b_2, b_3

$$b_1 = a_1 + 2 = 23 + 2 = 25$$

$$b_2 = a_2 + 3 = 27 + 3 = 30$$

$$b_3 = a_3 + 5 = 31 + 5 = 36$$

Comprobamos que b_1, b_2 y b_3 están en progresión geométrica porque:

$$r = \frac{b_2}{b_1}$$

$$r = \frac{b_3}{b_2}$$

$$\frac{b_2}{b_1} = \frac{b_3}{b_2}$$

$$\frac{30}{25} = \frac{36}{30}$$