

PROGRESIONES GEOMÉTRICAS

Problema 41:

Hallar la razón de una progresión geométrica de seis términos, sabiendo que la suma de los cinco primeros vale 170,5 y la suma de los cinco últimos 682. Formar la progresión.

Solución Problema 41:

Sabemos que la fórmula de la suma de una progresión geométrica limitada es:

$$S_n = \frac{a_n \cdot r - a_1}{r - 1}$$

En el caso de los 5 primeros términos:

$$170,5 = \frac{a_5 \cdot r - a_1}{r - 1} = \frac{(a_1 \cdot r^4) \cdot r - a_1}{r - 1} = \frac{a_1 \cdot r^5 - a_1}{r - 1} = \frac{a_1 \cdot (r^5 - 1)}{r - 1}$$

$$170,5 = \frac{a_1 \cdot (r^5 - 1)}{r - 1}$$

En el caso de los 5 últimos términos:

$$S_n = \frac{a_n \cdot r - a_2}{r - 1}$$

$$682 = \frac{a_6 \cdot r - a_2}{r - 1} = \frac{(a_1 \cdot r^5) \cdot r - (a_1 \cdot r)}{r - 1} = \frac{a_1 \cdot r^6 - a_1 \cdot r}{r - 1} = \frac{a_1 \cdot (r^6 - r)}{r - 1}$$

$$682 = \frac{a_1 \cdot (r^6 - r)}{r - 1}$$

Dividiendo ambas sumas miembro a miembro, obtenemos la razón:

$$\frac{682}{170,5} = \frac{\frac{a_1 \cdot (r^6 - r)}{r - 1}}{\frac{a_1 \cdot (r^5 - 1)}{r - 1}} = \frac{a_1 \cdot (r^6 - r)}{a_1 \cdot (r^5 - 1)} = \frac{(r^6 - r)}{(r^5 - 1)} = \frac{r(r^5 - 1)}{(r^5 - 1)} = r$$

$$r = \frac{682}{170,5} = 4$$

Sustituimos su valor en:

$$170,5 = \frac{a_1 \cdot (r^5 - 1)}{r - 1}$$

$$170,5 = \frac{a_1 \cdot (4^5 - 1)}{4 - 1} = \frac{a_1 \cdot (4^5 - 1)}{3} = \frac{a_1 \cdot (1024 - 1)}{3} = \frac{a_1 \cdot 1023}{3}$$

$$170,5 = \frac{a_1 \cdot 1023}{3}$$

Despejando a_1 :

$$a_1 = \frac{170,5 \cdot 3}{1023} = \frac{511,5}{1023} = \frac{1}{2}$$

La progresión es:

$$a_1 = \frac{1}{2}$$

$$a_2 = \frac{1}{2} \cdot 4 = 2$$

$$a_3 = 2 \cdot 4 = 8$$

$$a_4 = 8 \cdot 4 = 32$$