PROGRESIONES GEOMÉTRICAS

Problema 38:

Hallar la suma:

$$1 + i^3 + i^6 + i^9 + \cdots + i^{27}$$

Solución Problema 38:

$$1 + i^3 + i^6 + i^9 + \cdots + i^{27}$$

Puede expresarse como:

$$1 + (i)^3 + (i^2)^3 + (i^3)^3 + (i^4)^3 + \cdots + (i^9)^3$$

Luego, es una progresión geométrica, cuya razón es:

$$r = \frac{(i^2)^3}{(i)^3} = \frac{i^6}{i^3} = i^6 . i^{-3} = i^3$$

Sabemos que la fórmula de la suma de una progresión geométrica de términos finitos es:

$$S_n = \frac{a_n . r - a_1}{\mathrm{r} - 1}$$

Así:

$$S_n = \frac{(i^9)^3 . i^3 - 1}{i^3 - 1} = \frac{i^{27} . i^3 - 1}{i^3 - 1} = \frac{i^{30} - 1}{i^3 - 1} = \frac{i^{30} - 1}{i^3 - 1} . \frac{i^3 + 1}{i^3 + 1} =$$

$$= \frac{i^{33} - i^3 + i^{30} - 1}{i^6 - i^3 + i^3 - 1} = \frac{i^{33} + i^{30} - i^3 - 1}{i^6 - 1} = \frac{i^{4.8} . i + i^{4.7} . i^2 - i^3 - 1}{i^{4.1} . i^2 - 1}$$

$$\frac{i^2 - 1 + i - i^3}{i^2 - 1} = \frac{i^2 - 1}{i^2 - 1} - \frac{i^3 - i}{i^2 - 1} = 1 - \frac{i^3 - i}{i^2 - 1} = 1 - \frac{(i^3 - i)(i^2 + 1)}{(i^2 - 1)(i^2 + 1)}$$

$$1 - \frac{i^5 - i^3 + i^3 - i}{i^4 - i^2 + i^2 - 1} = 1 - \frac{i^5 - i}{i^4 - 1} = 1 - \frac{i(i^4 - 1)}{i^4 - 1} = 1 - i$$

$$\boldsymbol{S_n = 1 - \mathrm{i}}$$