PROGRESIONES GEOMÉTRICAS

Problema 37:

Determinar el valor que se ha de dar a x para que los términos x+2, 3x+2 y 9x-2 estén en progresión geométrica. Calcular la suma de los cinco primeros términos de esta progresión y la suma de la progresión geométrica indefinida:

$$\frac{1}{x+2}, \frac{1}{3x+2}, \frac{1}{9x-2}$$

para el valor de x antes hallado.

Solución Problema 37:

Sabemos que la razón de una progresión geométrica:

$$r = \frac{a_2}{a_1}$$

$$r = \frac{3x+2}{x+2}$$

$$r = \frac{a_3}{a_2}$$

$$r = \frac{9x-2}{3x+2}$$

Igualando en r:

$$\frac{3x+2}{x+2} = \frac{9x-2}{3x+2}$$

$$(3x+2)(3x+2) = (9x-2)(x+2)$$

$$(3x+2)(3x+2) = (9x-2)(x+2)$$

$$9\mathrm{x}^2 + 4 + 12x = 9\mathrm{x}^2 - 2x + 18x - 4$$

$$4 + 12x = 16x - 4$$

$$12x - 16x = -4 - 4$$

$$-4x = -8$$

$4x = 8$

$$x = \frac{8}{4} = 2$$

Luego, para x= 2 están en progresión geométrica.

Calculamos la razón:

$$r = \frac{3x + 2}{x + 2}$$

$$r = \frac{3.2 + 2}{2 + 2} = \frac{6 + 2}{2 + 2} = \frac{8}{4} = 2$$

Hallamos a1 y a5:

$a_1 = x + 2 = 2 + 2 = 4$

Sabemos que

$a_n = a_1 r^{\mathrm{n}-1}$

Aplicado a nuestro caso:

$a_5 = a_1 r^{5-1}$

$a_5 = a_1 r^4$

$a_5 = 4.2^4$

$a_5 = 4.2^4 = 64$

Calculamos la suma de los cinco primeros términos de esta progresión:

$$S_n = \frac{a_n . r - a_1}{r - 1}$$

$$S_5 = \frac{a_5 . r - a_1}{r - 1}$$

$$S_5 = \frac{64.2 - 4}{2 - 1}$$

$S_5 = 64.2 - 4 = 128 - 4 = 124$

Calculamos la suma de la progresión geométrica indefinida:

$$\frac{1}{x+2}, \frac{1}{3x+2}, \frac{1}{9x-2}$$

para el valor de x antes hallado.

Luego la progresión geométrica queda para x= 2

$$\frac{1}{2+2}, \frac{1}{3.2+2}, \frac{1}{9.2-2}$$

$$\frac{1}{4}, \frac{1}{6+2}, \frac{1}{18-2}$$

$$\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots$$

Sabemos la fórmula de la suma de la progresión geométrica ilimitada:

$$S_n = \frac{a_1}{1-r}$$

$$S_n = \frac{\frac{1}{4}}{1-2}$$

$$S_n = -\frac{1}{4}$$