

## PROGRESIONES GEOMÉTRICAS

### Problema 30:

El producto de tres números en progresión geométrica es 216. Si se multiplica el primero por 12, el segundo por 5 y el tercero por dos se obtienen tres números en progresión aritmética, dispuestos en el mismo orden. Calcular dichos números.

### Solución Problema 30:

Sea  $a_1$ ,  $a_2$  y  $a_3$  los tres números de la progresión geométrica.

Sabemos que el producto de tres números en progresión geométrica es 216, luego:

$$P = \sqrt{(a_1 \cdot a_n)^n}$$

$$216 = \sqrt{(a_1 \cdot a_n)^3}$$

Despejamos  $a_1 \cdot a_3$ :

$$(216)^2 = \sqrt{(a_1 \cdot a_n)^3}^2$$

$$(216)^2 = (a_1 \cdot a_3)^3$$

$$a_1 \cdot a_3 = \sqrt[3]{(216)^2}$$

$$a_1 \cdot a_3 = \sqrt[3]{[(6)^3]^2}$$

$$a_1 \cdot a_3 = \sqrt[3]{[(6)^3]^2}$$

$$a_1 \cdot a_3 = \sqrt[3]{[(6)^2]^3}$$

$$a_1 \cdot a_3 = (6)^2$$

Ponemos  $a_3$  en función de  $a_1$ , para ello:

$$a_1 \cdot (a_1 r^2) = (6)^2$$

$$a_1^2 r^2 = (6)^2$$

$$a_1 \cdot r = 6$$

Pero sabemos que:

$$a_1 \cdot r = 6 = a_2$$

Si se multiplica el segundo por 5 se obtiene el segundo número de la progresión aritmética, luego:

$$b_2 = 5 a_2 = 5 \cdot 6 = 30$$

La progresión geométrica en función de  $a_2$  será:

$$a_1 = \frac{6}{r}$$

$$a_2 = 6$$

$$a_3 = 6 \cdot r$$

La progresión aritmética en función de  $b_2$  será:

$$b_1 = b_2 - d = 30 - d$$

$$b_2 = 30$$

$$b_3 = b_2 + d = 30 + d$$

Pero el enunciado dice que:

Si se multiplica:

El primero por 12, se obtiene un número en progresión aritmética, luego:

$$12a_1 = b_1$$

$$12 \cdot \frac{6}{r} = 30 - d \text{ ecuación 1}$$

El tercero por dos, se obtiene un número en progresión aritmética, luego:

$$2a_3 = b_3$$

$$2 \cdot 6r = 30 + d \text{ ecuación 2}$$

Tenemos un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas:

$$12 \cdot \frac{6}{r} = 30 - d \text{ ecuación 1}$$

$$2 \cdot 6r = 30 + d \text{ ecuación 2}$$

Operando:

$$\frac{72}{r} = 30 - d$$

$$12r = 30 + d$$

Sumamos miembro a miembro:

$$\frac{72}{r} + 12r = 60$$

Operamos:

$$72 + 12r^2 = 60r$$

$$12r^2 - 60r + 72 = 0$$

Simplificando: por 12:

$$r^2 - 5r + 6 = 0$$

$$r = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2}$$

$$r_{11} = \frac{5 + 1}{2} = 3$$

$$r_{12} = \frac{5 - 1}{2} = 2$$

Para  $r_{11} = 3$ , tenemos:

$$a_1 = \frac{6}{r} = \frac{6}{3} = 2$$

$$a_2 = 6$$

$$a_3 = 6 \cdot 3 = 18$$

**PROGRESIONES GEOMÉTRICAS:** Problema 30

Para  $r_{112} = 2$ , tenemos:

$$a_1 = \frac{6}{r} = \frac{6}{2} = 3$$

$$a_2 = 6$$

$$a_3 = 6 \cdot 2 = 12$$