

LOGARITMOS

Problema 35:

Hallar x

$$x = \sqrt{\frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{7} \sqrt{\frac{1}{4} \sqrt{\frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{7} \sqrt{\frac{1}{4} \dots}}}}}}}$$

Solución Problema 35:

$$x = \sqrt{\frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{7} \sqrt{\frac{1}{4} \sqrt{\frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{7} \sqrt{\frac{1}{4} \dots}}}}}}}$$

Es lo mismo que $x =$ todo el contenido de la raíz elevada a $1/2$

$$x = \left(\sqrt{\frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{7} \sqrt{\frac{1}{4} \sqrt{\frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{7} \sqrt{\frac{1}{4} \dots}}}}}} \right)^{1/2}$$

Tomamos logaritmos en los dos términos de la ecuación

$$\log x = \log \left(\sqrt{\frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{7} \sqrt{\frac{1}{4} \sqrt{\frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{7} \sqrt{\frac{1}{4} \dots}}}}}} \right)^{1/2}$$

Es logaritmo de una raíz

Luego

$$\log x = \frac{1}{2} \left[\log \left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{7} \sqrt{\frac{1}{4} \sqrt{\frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{7} \sqrt{\frac{1}{4} \dots}}}}}} \right) \right]$$

Dentro del paréntesis es el logaritmo de un producto, luego

$$\log x = \frac{1}{2} \left[\log \frac{1}{2} + \log \left(\frac{1}{7} \sqrt{\frac{1}{4} \sqrt{\frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{7} \sqrt{\frac{1}{4} \dots}}}} \right) \right]$$

Ahora, se vuelve a repetir todo el proceso, es el logaritmo de una raíz

$$\log x = \frac{1}{2} \left[\log \frac{1}{2} + \log \left(\frac{1}{7} \sqrt{\frac{1}{4} \sqrt{\frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{7} \sqrt{\frac{1}{4} \dots}}}} \right)^{1/2} \right]$$

Luego

$$\log x = \frac{1}{2} \left[\log \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \log \left(\frac{1}{7} \sqrt{\frac{1}{4} \sqrt{\frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{7} \sqrt{\frac{1}{4} \dots}}}} \right) \right]$$

Dentro del paréntesis es el logaritmo de un producto, luego

$$\log x = \frac{1}{2} \left[\log \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left(\log \frac{1}{7} + \log \sqrt{\frac{1}{4} \sqrt{\frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{7} \sqrt{\frac{1}{4} \dots}}}} \right) \right]$$

Ahora, se vuelve a repetir todo el proceso, es el logaritmo de una raíz

$$\log x = \frac{1}{2} \left[\log \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left(\log \frac{1}{7} + \left(\log \frac{1}{4} \sqrt{\frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{7} \sqrt{\frac{1}{4} \dots}}}} \right)^{1/2} \right) \right]$$

Luego:

$$\log x = \frac{1}{2} \left[\log \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left(\log \frac{1}{7} + \frac{1}{2} \left(\log \frac{1}{4} \sqrt{\frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{7} \sqrt{\frac{1}{4} \dots}}}} \right) \right) \right]$$

Dentro del paréntesis es el logaritmo de un producto, luego

$$\log x = \frac{1}{2} \left[\log \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left(\log \frac{1}{7} + \frac{1}{2} \left(\log \frac{1}{4} + \log \sqrt{\frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{7} \sqrt{\frac{1}{4} \dots}}}} \right) \right) \right]$$

Pero lo marcado en rojo es la x inicial, luego podemos poner:

$$\log x = \frac{1}{2} \left[\log \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left(\log \frac{1}{7} + \frac{1}{2} \left(\log \frac{1}{4} + \log x \right) \right) \right]$$

$$\log x = \frac{1}{2} \left[\log \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left(\log \frac{1}{7} + \frac{1}{2} \log \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \log x \right) \right]$$

$$\log x = \frac{1}{2} \left[\log \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \log \frac{1}{7} + \frac{1}{4} \log \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \log x \right]$$

$$\log x = \frac{1}{2} \log \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \log \frac{1}{7} + \frac{1}{8} \log \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \log x$$

$$\log x - \frac{1}{8} \log x = \frac{1}{2} \log \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \log \frac{1}{7} + \frac{1}{8} \log \frac{1}{4}$$

$$\frac{7}{8} \log x = \frac{1}{2} \log \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \log \frac{1}{7} + \frac{1}{8} \log \frac{1}{4}$$

Para tener el mismo denominador en ambos términos de la ecuación, multiplicamos cada miembro del 2º término por 4, 2 y 1 respectivamente:

$$\frac{7}{8} \log x = \frac{4}{8} \log \frac{1}{2} + \frac{2}{8} \log \frac{1}{7} + \frac{1}{8} \log \frac{1}{4}$$

$$\frac{7}{8} \log x = \frac{1}{8} \left(4 \log \frac{1}{2} + 2 \log \frac{1}{7} + \log \frac{1}{4} \right)$$

Simplificando por 8:

$$7 \log x = 4 \log \frac{1}{2} + 2 \log \frac{1}{7} + \log \frac{1}{4}$$

$$7 \log x = 4(-0,31030) + 2(-0,845098) + (-0,602060)$$

$$7 \log x = -1,20412 - 1,690196 - 0,602060$$

$$7 \log x = -3,496376$$

$$\log x = \frac{-3,496376}{7} = -0,499482$$

Aplicando la definición de logaritmo:

$$10^{-0,499482} = x$$

$$\mathbf{x = 0,31660}$$