LOGARITMOS

Problema 21:

Hallar x

$$x = \sqrt{2\sqrt[3]{3\sqrt{2\sqrt[3]{3\sqrt{\dots}}}}}$$

Solución Problema 21:

$$x = \sqrt{2\sqrt[3]{3\sqrt{2\sqrt[3]{3\sqrt{\dots}}}}}$$

Es lo mismo que x= todo el contenido de la raíz elevada a 1/2

$$x = \left(2\sqrt[3]{3\sqrt{2\sqrt[3]{3\sqrt{\dots}}}}\right)^{1/2}$$

Tomamos logaritmos en los dos términos de la ecuación

$$\log\, x = \log\left(2\sqrt[3]{3\sqrt{2\sqrt[3]{3\sqrt{\dots}}}}\right)^{1/2}$$

Es logaritmo de una raíz

Luego

$$\log x = \frac{1}{2}[\log(2\sqrt[3]{3\sqrt{2\sqrt[3]{3\sqrt{\ldots}}}})]$$

Dentro del paréntesis es el logaritmo de un producto, luego

$$\log x = \frac{1}{2}[\log 2 + \log(\sqrt[3]{3\sqrt{2\sqrt[3]{3\sqrt{\ldots}}}})]$$

La expresión anterior es igual a

$$\log x = \frac{1}{2}[\log 2 + \log(3.\sqrt{2\sqrt[3]{3\sqrt{\ldots}}})^{\frac{1}{3}}]$$

Dentro del paréntesis es el logaritmo de una raíz,

$$\log x = \frac{1}{2}[\log 2 + \frac{1}{3}\log(3 + \log\sqrt{2\sqrt[3]{3\sqrt{\ldots}}})]$$

Pero

$$\log\sqrt{2\sqrt[3]{3\sqrt{\ldots}}}) = \log x$$

Por tanto la expresión anterior queda

$$\log x = \frac{1}{2}[\log 2 + \frac{1}{3}(\log 3 + \log x)] = \frac{1}{2}[\log 2 + \frac{1}{3}\log 3 + \frac{1}{3}\log x)]$$

$$\log x = \frac{1}{2}\log 2 + \frac{1}{6}\log 3 + \frac{1}{6}\log x$$

$$\log x - \frac{1}{6}\log x = \frac{1}{2}\log 2 + \frac{1}{6}\log 3$$

$$\frac{5}{6}\log x = \frac{3}{6}\log 2 + \frac{1}{6}\log 3$$

$$\frac{1}{6}(5\log x) = \frac{1}{6}(3\log 2 + \log 3)$$

$$5\log x = 3\log 2 + \log 3$$

$$5\log x = 3\,x 0{,}301030 + 0{,}477121 = 1{,}3802113$$

$$\log x = \frac{1{,}3802113}{5} = 0{,}27604226$$

$$x = antilog\ 0{,}27604226$$

$$\mathbf{x = \boldsymbol{antilog}\ 0{,}27604226 = 1{,}88817}$$