PROGRESIONES ARITMÉTICAS

Problema 39:

La suma de los cinco términos racionales de una progresión aritmética creciente es 40 y el producto de ellos es 12320. El quinto término es:

Solución Problema 39:

Sabemos que:

$$S_n = a_c . n$$

Luego:

$$a_c = \frac{S_n}{\mathrm{n}}$$

$$a_c = \frac{40}{5} = 8$$

$$a_c = 8$$

$$a_3 = 8$$

Por tanto, la progresión de 5 términos podemos expresarla en función del término central:

$$a_1 = 8 - 2\mathrm{d}$$

$$a_2 = 8 - \mathrm{d}$$

$$a_3 = 8$$

$$a_4 = 8 + \mathrm{d}$$

$$a_5 = 8 + 2\mathrm{d}$$

Sabemos que el producto de ellos es 12320, luego:

$$a_1 . a_2 . a_3 . a_4 . a_5 = 12320$$

Poniéndolos en función de a_c:

$$(8 - 2\mathrm{d}) . (8 - \mathrm{d}) . 8 . (8 + \mathrm{d}) . (8 + 2\mathrm{d}) = 12320$$

$$(8-2\mathrm{d}).(8-\mathrm{d}).(8+\mathrm{d}).(8+2\mathrm{d})=\frac{12320}{8}=1540$$

Esta expresión es una doble suma por diferencia igual a diferencia de cuadrados de:

$$(8-2\mathrm{d}).(8-\mathrm{d}).(8+\mathrm{d}).(8+2\mathrm{d})=1540$$

Esta expresión es una doble suma por diferencia igual a diferencia de cuadrados de:

$$(8-2\mathrm{d}).(8+2\mathrm{d})=\ (64-4d^2)$$

$$(8-\mathrm{d}).(8+\mathrm{d})=\ (64-d^2)$$

$$(64-4d^2).(64-d^2)=1540$$

Operando,

$$4096-256d^2-64d^2+4d^4=1540$$

$$4d^4-320d^2+4096-1540=0$$

$$4d^4-320d^2+2556=0$$

Simplificando por 4:

$$d^4-80d^2+639=0$$

Hacemos el siguiente cambio de variable para resolver la ecuación bicuadrada:

$$d^2=x$$

$$d^4=x^2$$

$$x^2-80x+639=0$$

$$x=\frac{80\pm\sqrt{6400-2556}}{2}=\ \frac{80\pm\sqrt{3844}}{2}=\frac{80\pm 62}{2}$$

$$x_1=\frac{80+62}{2}=\ \frac{142}{2}=71\ \ solución\ no\ válida$$

$$x_2=\frac{80-62}{2}=\ \frac{18}{2}=9\ solución\ válida$$

Deshacemos el cambio de variable:

$d^2 = x$

$d^2 = 9$

$d = \sqrt{9} = \pm 3$

Como el enunciado dice que la P.A. es creciente la solución válida es:

$d = 3$

Hallamos el quinto término:

$a_5 = 8 + 2\mathrm{d}$

$a_5 = 8 + 2.3 = 8 + 6 = 14$

$a_5 = 14$