

PROGRESIONES ARITMÉTICAS

Problema 25:

En una progresión aritmética, el último término es $2 + 7\sqrt{2}$; la razón $\sqrt{2}$, y la suma de todos los términos, $16 + 28\sqrt{2}$

Hallar el número de términos y el primero de ellos

Solución Problema 25:

De la fórmula de cálculo del último término tenemos:

$$a_n = a_1 + (n - 1)d$$

$$2 + 7\sqrt{2} = a_1 + (n - 1)\sqrt{2}$$

$$2 + 7\sqrt{2} = a_1 + n\sqrt{2} - \sqrt{2}$$

$$a_1 = 2 + 8\sqrt{2} - n\sqrt{2} \text{ ecuación 1}$$

De la fórmula de la suma tenemos:

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$$

$$16 + 28\sqrt{2} = \frac{a_1 + 2 + 7\sqrt{2}}{2} \cdot n \text{ ecuación 2}$$

Sustituyendo el valor de a_1 de la ecuación 1 en la ecuación 2, tenemos:

$$16 + 28\sqrt{2} = \frac{2 + 8\sqrt{2} - n\sqrt{2} + 2 + 7\sqrt{2}}{2} \cdot n = \frac{4 + 15\sqrt{2} - n\sqrt{2}}{2} \cdot n$$

$$4n + 15n\sqrt{2} - n^2\sqrt{2} = 32 + 56\sqrt{2}$$

$$n^2\sqrt{2} - 4n - 15n\sqrt{2} + 32 + 56\sqrt{2} = 0$$

$$n^2\sqrt{2} - n(4 + 15\sqrt{2}) + 32 + 56\sqrt{2} = 0$$

A continuación resolvemos la ecuación de 2º grado:

$$n = \frac{(4 + 15\sqrt{2}) \pm \sqrt{(4 + 15\sqrt{2})^2 - 4[(\sqrt{2})(32 + 56\sqrt{2})]}}{2\sqrt{2}} =$$

$$= \frac{(4 + 15\sqrt{2}) \pm \sqrt{466 + 120\sqrt{2} - 448 - 128\sqrt{2}}}{2\sqrt{2}} =$$

$$= \frac{(4 + 15\sqrt{2}) \pm \sqrt{18 - 8\sqrt{2}}}{2\sqrt{2}} \text{ ecuación 3}$$

Para resolver la ecuación hemos de transformar el radical $\sqrt{18 - 8\sqrt{2}}$, para ello aplicamos la fórmula de transformación:

$$\sqrt{A - \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A + \sqrt{A^2 - B}}{2}} - \sqrt{\frac{A - \sqrt{A^2 - B}}{2}}$$

Luego:

$$\sqrt{18 - 8\sqrt{2}} = \sqrt{18 - \sqrt{128}}$$

$$A = 18$$

$$B = 128$$

$$\sqrt{18 - \sqrt{128}} = \sqrt{\frac{18 + \sqrt{18^2 - 128}}{2}} - \sqrt{\frac{18 - \sqrt{18^2 - 128}}{2}}$$

$$= \sqrt{\frac{18 + \sqrt{324 - 128}}{2}} - \sqrt{\frac{18 - \sqrt{324 - 128}}{2}}$$

$$= \sqrt{\frac{18 + \sqrt{196}}{2}} - \sqrt{\frac{18 - \sqrt{196}}{2}} = \sqrt{\frac{18 + 14}{2}} - \sqrt{\frac{18 - 14}{2}}$$

$$\sqrt{\frac{32}{2}} - \sqrt{\frac{4}{2}} = \sqrt{16} - \sqrt{2} = 4 - \sqrt{2}$$

Este resultado de $4 - \sqrt{2}$, lo sustituyo en la ecuación 3

$$= \frac{(4 + 15\sqrt{2}) \pm \sqrt{18 - 8\sqrt{2}}}{2\sqrt{2}} = \frac{(4 + 15\sqrt{2}) \pm (4 - \sqrt{2})}{2\sqrt{2}} =$$

$$n_1 = \frac{4 + 15\sqrt{2} + 4 - \sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \frac{8 + 14\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \frac{4 + 7\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{(4 + 7\sqrt{2})\sqrt{2}}{2} =$$

$$\frac{4\sqrt{2} + 14}{2} = 2\sqrt{2} + 7 \text{ solución no válida}$$

$$n_2 = \frac{4 + 15\sqrt{2} - 4 + \sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \frac{16\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \frac{16}{2} = \mathbf{8}$$

El número de términos es 8

Sustituimos el valor de "n" en la ecuación1:

$$a_1 = 2 + 8\sqrt{2} - n\sqrt{2} = 2 + 8\sqrt{2} - 8\sqrt{2} = \mathbf{2}$$

El primer término es 2