

PROGRESIONES ARITMÉTICAS

Problema 24:

La suma de los seis términos centrales de una progresión aritmética creciente de 16 términos es 141, y el producto de sus extremos, 46. ¿Cuál es la progresión?

Solución Problema 24:

La progresión tiene 16 términos:

$$a_1 \ a_2 \ a_3 \ a_4 \ a_5 \ a_6 \ a_7 \ a_8 \ a_9 \ a_{10} \ a_{11} \ a_{12} \ a_{13} \ a_{14} \ a_{15} \ a_{16}$$

Los seis términos centrales son: $a_6 \ a_7 \ a_8 \ a_9 \ a_{10} \ a_{11}$

La suma de éstos es: 141

De estas dos premisas podemos obtener a_6 y a_{11} en función de a_1 :

$$a_n = a_1 + (n - 1)d$$

$$a_6 = a_1 + 5d$$

$$a_{11} = a_1 + 10d$$

Luego:

$$S_{6-11} = \frac{a_6 + a_{11}}{2} \cdot n$$

$$141 = \frac{(a_1 + 5d) + (a_1 + 10d)}{2} \cdot 6$$

$$\frac{141}{3} = 2a_1 + 15d$$

$$2a_1 + 15d = 47 \quad \text{ecuación 1}$$

El enunciado nos dice que el producto de sus extremos es 46

$$a_1 \times a_{16} = 46$$

Ponemos a_{16} en función de a_1 :

$$a_1x(a_1 + 15d) = 46$$

$$a_1^2 + 15a_1d = 46 \text{ ecuación 2}$$

De la ecuación 1 despejamos "d" y la sustituimos en la ecuación 2:

$$2a_1 + 15d = 47 \text{ ecuación 1}$$

$$d = \frac{47 - 2a_1}{15}$$

$$a_1^2 + 15a_1d = 46 \text{ ecuación 2}$$

$$a_1^2 + 15a_1 \frac{47 - 2a_1}{15} = 46$$

$$a_1^2 + 47a_1 - 2a_1^2 = 46$$

$$a_1^2 - 47a_1 + 46 = 0$$

$$a_1 = \frac{47 \pm \sqrt{2209 - 184}}{2} = \frac{47 \pm \sqrt{2025}}{2} = \frac{47 \pm 45}{2}$$

$$a_{11} = \frac{47 + 45}{2} = \frac{92}{2} = 46$$

$$a_{12} = \frac{47 - 45}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

Para $a_{11} = 46$

$$d = \frac{47 - 2a_1}{15} = d = \frac{47 - 92}{15} = -3$$

Solución no válida ya que al ser la razón negativa la progresión es decreciente, y el enunciado nos dice lo contrario.

Para $a_{12} = 1$

$$d = \frac{47 - 2a_1}{15} = d = \frac{47 - 2}{15} = 3 \text{ solución válida}$$

