PROGRESIONES ARITMÉTICAS

Problema 21:

Los coeficientes de una ecuación de 2º grado y el término independiente forman una progresión aritmética. La suma de las raíces representa la tercera parte de la suma de los términos de la progresión, y el producto de las raíces excede en 7 unidades al coeficiente del 2º término. ¿ cuál es la ecuación?

Solución Problema 21:

Sea la ecuación buscada de la forma:

$$\mathrm{a}x^2 + bx + c = 0$$

Para una más fácil comprensión de la resolución hacemos:

$$\mathrm{a} = a_1$$

$$\mathrm{b} = a_2 = a_1 + d$$

$$\mathrm{c} = a_3 = a_2 + d = (a_1 + d) + d = a_1 + 2d$$

número de términos, n= 3

Aplicando la regla que relaciona las raíces con los coeficientes, y según el enunciado tenemos:

La suma de las raíces representa la tercera parte de la suma de los términos de la progresión:

$$x_1 + x_2 = \frac{1}{3}\left(\frac{a_1 + a_3}{2}.3\right) = \frac{a_1 + a_3}{2}$$

$$x_1 + x_2 = \frac{-\mathrm{b}}{a} = \frac{-(a_1 + \mathrm{d})}{a_1} = \frac{a_1 + a_3}{2} = \frac{a_1 + a_1 + 2d}{2} =$$

$$\frac{-(a_1 + \mathrm{d})}{a_1} = \frac{a_1 + a_1 + 2d}{2} = \frac{2a_1 + 2d}{2} = a_1 + d$$

$$\frac{\cancel{-(a_1+\mathrm{d})}}{a_1} = \cancel{(a_1+d)}$$

$$\frac{-1}{a_1} = 1$$

$$\boldsymbol{a_1} = -\mathbf{1}$$

Ahora según el enunciado, el producto de las raíces excede en 7 unidades al coeficiente del 2º término

$$x_1 x_2 = 7 + a_2$$

$$\frac{c}{a} = 7 + a_2$$

$$\frac{a_1 + 2d}{a_1} = 7 + a_1 + d$$

Sustituyendo a_1 por su valor

$$\frac{-1 + 2d}{-1} = 7 - 1 + d$$

$$1 - 2d = 6 + d$$

$$\mathbf{d} = \frac{\mathbf{-5}}{\mathbf{3}}$$

Por tanto, obtenida la diferencia y el primer término, podemos obtener los otros

$$\mathrm{a} = a_1$$

$$\mathbf{b} = \boldsymbol{a_2} = a_1 + d = -1 - \frac{5}{3} = \frac{-8}{3}$$

$$c = a_3 = a_2 + d = \frac{-8}{3} - \frac{-5}{3} = \frac{\mathbf{-13}}{\mathbf{3}}$$

Luego la ecuación queda:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$-x^2 - \frac{\mathbf{8}}{\mathbf{3}}x - \frac{\mathbf{13}}{\mathbf{3}} = 0$$

La ecuación pedida es

$$\mathbf{3x^2 + 8x + 13 = 0}$$