

PROGRESIONES ARITMÉTICAS

Problema 19:

La suma de los cinco primeros términos de una progresión aritmética es 45, y la suma de sus cuadrados 495. Formar la progresión.

Solución Problema 19:

Sea a_1 el 1er término de la progresión

Sea a_2 el 2º término de la progresión

$$a_2 = a_1 + d$$

Sea a_3 el 3er término de la progresión

$$a_3 = a_2 + d = (a_1 + d) + d = a_1 + 2d$$

Sea a_4 el 4º término de la progresión

$$a_4 = a_3 + d = (a_1 + 2d) + d = a_1 + 3d$$

Sea a_5 el 5º término de la progresión

$$a_5 = a_4 + d = (a_1 + 3d) + d = a_1 + 4d$$

Sea n el número de términos= 5

Según el enunciado

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$$

$$45 = \frac{a_1 + a_1 + 4d}{2} \cdot n = \frac{2a_1 + 4d}{2} \cdot 5$$

$$90 = (2a_1 + 4d) \cdot 5$$

$$a_1 + 2d = 9 \text{ ecuación 1}$$

Según el enunciado: la suma de los cuadrados de los 5 términos es 495:

$$a_1^2 + (a_1 + d)^2 + (a_1 + 2d)^2 + (a_1 + 3d)^2 + (a_1 + 4d)^2 = 495$$

Operando sobre la ecuación anterior tenemos:

$$3a_1^2 + 8a_1d + 14d^2 + 36d = 333 \text{ ecuación 2}$$

Despejando a_1 en la ecuación 1 y sustituyendo su valor en la ecuación 2 tenemos:

$$a_1 = 9 - 2d$$

$$3(9 - 2d)^2 + 8(9 - 2d)d + 14d^2 + 36d = 333$$

$$3(81 + 4d^2 - 36d) + 8(9d - 2d^2) + 14d^2 + 36d = 333$$

$$243 + 12d^2 - 108d + 72d - 16d^2 + 14d^2 + 36d = 333$$

$$10d^2 = 333 - 243 = 90$$

$$d^2 = \frac{90}{10} = 9$$

$$d = \sqrt{9} = \pm 3$$

Para $d=3$

$$a_1 = 9 - 2d = 9 - 2 \cdot 3 = 9 - 6 = 3$$

$$a_2 = a_1 + d = 3 + 3 = 6$$

$$a_3 = a_2 + d = 6 + 3 = 9$$

$$a_4 = a_3 + d = 9 + 3 = 12$$

$$a_5 = a_4 + d = 12 + 3 = 15$$

Luego la progresión es:

$$\cdot \\ \cdot -3 \cdot 6 \cdot 9 \cdot 12 \cdot 15 \\ \cdot$$

Para $d = -3$

$$a_1 = 9 - 2d = 9 - 2 \cdot (-3) = 9 + 6 = \mathbf{15}$$

$$a_2 = a_1 + d = 15 - 3 = \mathbf{12}$$

$$a_3 = a_2 + d = 12 - 3 = \mathbf{9}$$

$$a_4 = a_3 + d = 9 - 3 = \mathbf{6}$$

$$a_5 = a_4 + d = 6 - 3 = \mathbf{3}$$

Luego la progresión es:

$$\cdot \\ \cdot -15 \cdot 12 \cdot 9 \cdot 6 \cdot 3 \\ \cdot$$