

PROGRESIONES ARITMÉTICAS

Problema 53:

El primer término de una progresión aritmética es 2, y el primero, tercero y séptimo forman una progresión geométrica. Halla la suma de los siete primeros términos de la progresión aritmética.

Solución Problema 53:

La progresión aritmética será:

$$a_1; a_2; a_3; a_4; a_5; a_6; a_7$$

Sabemos que:

$$a_1 = 2$$

Como primero, tercero y séptimo forman una progresión geométrica, podemos expresar estos términos en función de a_1 :

$$a_3 = a_1 + 2d$$

$$a_3 = 2 + 2d$$

Y

$$a_7 = a_1 + 6d$$

$$a_7 = 2 + 6d$$

El primero, tercero y séptimo forman una progresión geométrica $b_1; b_2; b_3$, lo que significa que:

$$b_1 = a_1 = 2$$

$$b_2 = b_1 \cdot r = a_3$$

$$b_3 = b_1 \cdot r^2 = a_7$$

Luego,

$$r = \frac{b_2}{b_1}$$

$$r = \frac{b_3}{b_2}$$

$$\frac{b_2}{b_1} = \frac{b_3}{b_2}$$

Luego:

$$\frac{2 + 2d}{2} = \frac{2 + 6d}{2 + 2d}$$

$$(2 + 2d)(2 + 2d) = 2(2 + 6d)$$

$$2(1 + d)2(1 + d) = 2 \cdot 2(1 + 3d)$$

$$(1 + d)(1 + d) = 1 + 3d$$

$$1 + d + d + d^2 = 1 + 3d$$

$$d^2 + 1 + 2d = 1 + 3d$$

$$d^2 + 1 + 2d - 1 - 3d = 0$$

$$d^2 - d = 0$$

$$d(d - 1) = 0$$

Dos soluciones:

Para $d = 0$, suma de los 7 primeros términos:

$$a_1 = 2$$

$$a_7 = 2 + 6d = 2$$

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$$

$$S_7 = \frac{a_1 + a_7}{2} \cdot n = \frac{2 + 2}{2} \cdot 7 = \mathbf{14}$$

Para $d = 1$, suma de los 7 primeros términos:

$$a_1 = 2$$

$$a_7 = 2 + 6d = 2 + 6 \cdot 1 = 2 + 6 = \mathbf{8}$$

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$$

$$S_7 = \frac{a_1 + a_7}{2} \cdot n = \frac{2 + 8}{2} \cdot 7 = \mathbf{35}$$